F 7b14

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC
TIMIŞOARA

SERIA

MATEMATICA — FIZICA — MECANICA TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 15 (29) Fascicola 1

IANUARIE — IUNIE
1970

1972

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC TIMIŞOARA

SERIA MATEMATICĂ–FIZICĂ–MECANICĂ TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 15 (29) Fascicola 1

IANUARIE — IUNIE
1970

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848
MŰSZAKI KÖNYVTÁR

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. ing. *Gh. Silaș* (redactor șef), prof. ing. *Constantin Avram*, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr. ing. *I. Anton*, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr. ing. *M. Borneas*, prof. dr. ing. *M. Brașovan*, prof. ing. *V. Cocheci*, academician prof. dr. doc. *C. Drăgulescu*, prof. dr. *O. Em. Gheorghiu*, prof. ing. *V. Gheorghiu*, prof. ing. *Gh. Savii*, prof. ing. *D. Mateescu*, prof. dr. ing. *I. Novac*.

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratolvasótár

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. *O. Em. Gheorgiu* (redactor responsabil), prof. dr. ing. *M. Borneas* (redactor responsabil adjunct), prof. ing. *Gh. Silaș*, conf. dr. *B. Cristici*, conf. dr. *C. Simoiu*, conf. dr. ing. *I. Groșanu* și conf. dr. ing. *L. Brîndeu* (secretar de redacție).

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC TIMIȘOARA
SERIA MATEMATICĂ — FIZICĂ — MECANICĂ TEORETICĂ ȘI APLICATĂ.
Tom. 15 (29) Fasc. 1. Ianuarie-Iunie 1970

SUMAR

N. BOJA : Despre geometria plană neeuclidiană atașată unui grup conform 7
M. KISS, ST. MATEI : Algebre booleene ale perechilor de perechi 19
M. NEAGU : Aproximarea funcțiilor de mai multe variabile 23
N. NEAMȚU : Asupra unor ecuații funcționale 27
M. SHAH : Serii Fourier pentru polinoame hipergeometrice generalizate .. 33
I. STURZ : Polinoame ce au rădăcinile raționale în același timp cu derivatele lor 39
I. TĂUBER : Asupra ecuației flexibilității 47
GH. TUDOR : Asupra unor integrale improprii 51
I. I. NICOLAESCU : Lungimea buclei de dislocație 55
O. POPA : Extinderea teoremei cercului la reprezentarea integrală Cauchy a funcțiilor olomorfe 61
GH. SILAȘ, L. BRINDEU, V. BACRIA : Mișcări periodice ale unei mase libere pe un limitator elastic ce are o mișcare periodică 69
GH. SILAȘ, A. HEGEDUS, DOINA BECHERESCU : Mișcările vibropercutante ale particolei materiale excitate de o platformă mobilă .. 77
M. BORNEAS : O ecuație ondulatorie de tip Schrödinger cu derivate superioare 89

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ БЮЛЛЕТЕНЬ
ТИМИШОРСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКА — ФИЗИКА — ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том. 15 (29) Выпуск 1. Январы—июнь 1970.

СОДЕРЖАНИЕ

Н. БОЖА, О геометрии неевклидовой плоскости с конформной группой 7
М. КИШ, Ш. МАТЕЙ, Булевы алгебры пары пар 19
М. НЯГУ, Аппроксимация функций нескольких переменных 23
Н. НЯМЦУ, О некоторых функциональных уравнениях 27
М. ШАХ, Ряды фурье для гипергеометрических обобщенных многочленов 33
И. СТУРЗ, Многочлены имеющие рациональные корни одновременно с их производными 39
И. ТАУБЕР, Уравнению гибкости 47
Г. ТУДОР, О некоторых несобственных интегралах 51
И. И. НИКОЛАЕСКУ, Длина петли дислокации 55
О. ПОПА, Распространение теоремы круга на интегральное изображение Коши голоморфных функций 61
Г. СИЛАШ, Л. БРИНДЭУ, В. БАКРИЯ, Периодические движения свободной массы по упругому ограничителю с периодическим движением 69
Г. СИЛАШ, А. ХЕДЖЕДУШ, ДОИНА БЕКЕРЕСКУ, Виброударные движения материальной частицы возбужденной движущейся платформой 77
М. БОРИЕАС, Волновое уравнение типа Шредингер с производными высшего порядка 89

DESPRE GEOMETRIA PLANĂ NEEUCLIDIANĂ ATAŞATĂ UNUI GRUP CONFORM

DE

N. BOJA

Să considerăm mulţimea $G\{M[z],=M[z],\ M[\bar{z}]\}$ a aplicaţiilor

$$g:(z)_{<u>}\to(z)_{<u>}$$

în care g se defineşte prin legea

$$M[z]=(az+b)\,(cz+d)^{-1}={}'z$$

sau

$$M[\bar{z}]={}'z$$

cu

$$z=x+hy\in A_2,\quad x,\ y\in R,\ h^2=u\in R.$$

În baza izomorfismului ce se poate stabili între algebra $A_2=\{z\}$, în care distanţa dintre două elemente [6] este $|z_2-z_1|=\varepsilon\sqrt{(x_2-x_1)^2-u\,(y_2-y_1)^2}$ şi planul $(z)_{<u>}$, analog celui dintre algebra numerelor complexe obişnuite şi planul conform C^2, putem considera prin interpretarea geometrică cunoscută, că aplicaţiile g sînt transformări biliniare definite prin matricile pătrate nesingulare

$$M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$a=a_1+ha_2$, etc., aşa ca produsului g_2g_1 să-i corespundă produsul M_2M_1 sau $M_2\overline{M}_1$, aparţinînd grupului $\mathfrak{M}(2, C_{<u>})$ matricilor pătrate nesingulare definite peste corpul numerelor complexe generalizate $C_{<u>}$. Mulţimea GM este grupul lui Möbius în variabila $z\in C_{<u>}$, iar $H=\{M[z]\}\subset GM$ — un subgrup al său omomorf cu grupul S al operatorilor inversabili ai planului $(z)_{<u>}$, nucleul omomorfismului fiind grupul operatorilor $\{mI\}=S_0$ $(m\in C_{<u>})$, astfel încît subgrupul H este izomorf cu S/S_0. Nucleul omomorfismului det: $\mathfrak{M}(2, C_{<u>})\to\mathfrak{M}(1, C_{<u>})$ este subgrupul special $S\mathfrak{M}(2, C_{<u>})=\{I,-I\}$.

În [7] s-a arătat că, descompunînd $g \in H$ în produsul a trei transformări elementare $g_3 g_2 g_1$, definite prin operatorii

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{c} & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\delta = ad - bc)$$

prima și ultima reprezintă în $(z)_{<u>}$ mișcări și omotetii, iar în regiunile „inaccesibile" I_1 $(\varepsilon = +1)$ și I_2 $(\varepsilon = -1)$ ale planului

$$(z)_H = \{ (z)_{<u>} \mid u > 0 \}$$

definite prin inegalitățile $-\sqrt{u}\,|y| < x < \sqrt{u}\,|y|$, în care [6] $r = |z| = \varepsilon \sqrt{x^2 - uy^2}$ este imaginar ($r = ir'$, cu r' – real), antimișcări și omotetii; M_2 – caracterizează inversiunea.

Precizăm că în cele de mai sus și în următoarele, $\varepsilon = -1$ numai cînd $u > 0$ și $x + \sqrt{u}\,|y| < 0$, iar în rest, $\varepsilon = +1$.

Grupul automorfismelor care lasă punctul O fix se obține cu $b = d = 0$, $|c| = \varepsilon$ și este grupul $GL\ (2, C_{<u>})$ avînd expresiile analitice:

$$\begin{aligned} {}'x &= \varepsilon\rho\,[\,xC(\varphi) + uyS(\varphi)] \\ {}'y &= \varepsilon\rho\,[xS(\varphi) + yC(\varphi)] \end{aligned} \tag{1}$$

unde $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ sînt funcții trigonometrice generalizate [6] de forma

$$\begin{aligned} &C_E(x) = \cos ux, && S_E(x) = \frac{1}{i\sqrt{u}} \sin ux, && (u < 0) \\ &C_H(x) = \frac{e^{ux} + e^{-ux}}{2}, && S_H(x) = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{e^{ux} - e^{-ux}}{2}, && (u > 0) \\ &C_P(x) = 1, && S_P(x) = x, && (u = 0). \end{aligned} \tag{2}$$

Dacă notăm $\psi = \arg z$, ${}'\psi = \arg {}'z$, avem în urma unei rotații (1), obținută luînd $\rho = 1$ sau $\rho = -i$ dacă $a \in I_1 \cup I_2 \subset (z)_H$,

$${}'\psi = \varphi + \psi,$$

în care argumentele sînt arce aparținînd conicelor fundamentale ale fiecărui plan $(z)_{<u>}$

$$x^2 - uy^2 = r^2 \tag{3}$$

care rămîn invariante la o transformare (1).

Analog pot fi studiate și transformările $g \in GM - H$, care introduc în plus și o simetrie față de o dreaptă.

Prin aceasta se verifică că, grupul GM considerat este izomorf cu GC (2).

Elementele lui GM sînt funcții olomorfe pe $E = (z)_{<u>} - \{ z^\circ \}$, unde $z^\circ = -\frac{d}{c}$, dacă $g \in H$, sau $\bar{z} = -\frac{\bar{d}}{\bar{c}}$, dacă $g \in GM - H$.

Derivata unei astfel de funcţii $'z={}'x+h'y=f(z)$ se calculează cu una din formulele

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial' x}{\partial x}+h\frac{\partial' y}{\partial x}=\frac{\partial' x}{\partial x}+\frac{h}{u}\frac{\partial' x}{\partial y}=\frac{\partial' y}{\partial y}+\frac{h}{u}\frac{\partial' x}{\partial y}=\frac{\partial' y}{\partial y}+h\frac{\partial' y}{\partial x} \tag{4}$$

METRICI INVARIANTE

S-a arătat [7] că în urma unei aplicaţii g_2 definită prin operatorul M_2, conica fundamentală (3) se transformă în

$$'x^2-u'y^2=\frac{1}{r^2}, \tag{3'}$$

ceea ce ne spune că o conică fundamentală unitate ($r=1$) este invariantă. În acest caz proprietatea se păstrează oricare ar fi $g=g_3g_2g_1$ (abstracţie făcînd de translaţii).

Notînd prin Γ o astfel de conică, ea reprezintă în $(z)_{<u>}$ locul punctelor de modul 1; în particular, dacă ne aflăm în planul variabilei complexe obişnuite

$$(z)_{Ec}=\{(z)_{<u>}\,|\,u=-1\}$$

Γ va fi un cerc unitate, dacă ne aflăm în planul variabilei duble

$$(z)_{Hc}=\{(z)_{<u>}\,|\,u=+1\}$$

este o hiperbolă echilateră, iar dacă sîntem situaţi în planul variabilei complexe duale

$$(z)_P=(z)_{<u>}\,|\,u=0\},$$

Γ va fi parabola $x^2=1$. În rest – Γ este o elipsă sau o hiperbolă oarecare, pentru fiecare u fixat, negativ sau pozitiv.

Scriem $(z)_{<u>}=D_{int}\cup D_{ext}\cup\Gamma$, în care am notat $D_{int}=\Omega$ pe acela dintre domeniile delimitate în $(z)_{<u>}$ de Γ, care conţine originea $O\cdot D_{int}$ este un domeniu simplu conex; în $(z)_H$ – reprezintă regiunea inaccesibilă ($r=ir'$) şi regiunea cuprinsă între Γ şi asimptotele sale.

Dacă ne oprim numai la punctele $p\in\Omega\cup\Gamma$, putem avea în vedere o geometrie ataşată acestei regiuni, în condiţiile determinării unui grup de transformări care să o conserve.

Un astfel de grup există şi-l putem lua, în cazul nostru, grupul transformărilor liniar-fracţionare cu trei parametri φ, a^1, a^2 ($a^1+ha^2=a$) definit de matricea

$$M=\begin{pmatrix} C(\varphi)+hS(\varphi) & -a\,[C(\varphi)+hS(\varphi)] \\ -\bar{a} & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

cu $|a|\leqslant 1$.

S-au ales pentru aceasta transformări biliniare g de tipul considerat în introducere, deoarece acestea sînt automorfisme conforme [7] ale lui Ω, care conservă orientarea.

Invarianța lui $\Gamma\,('z'\bar{z}=z\bar{z}=1)$ se stabilește ținînd cont de faptul că [6]

$$|C(\varphi)+hS(\varphi)|=C^2(\varphi)-uS^2(\varphi)=1$$

și că putem avea $a\bar{a}=1$, în baza condiției impuse lui (5). Astfel, frontiera Γ a domeniului Ω, va fi privită ca „absolut" al geometriei grupului (5).

Ca formă metrică fundamentală în cazul unui domeniu $D\subset(z)$ simplu conex se poate alege, analog ca în [2], expresia

$$ds^2=\frac{2}{k^2}\tau K_D(z,\bar{z})\,dzd\bar{z}$$

invariantă la transformările conforme și în care k^2 este o constantă arbitrară pozitivă, iar $\tau=\frac{2\pi}{u}\sqrt{-u^\circ}$ $(u^\circ=-1,\ 0,\ 1)$ este perioada [6] funcțiilor trigonometrice generalizate ce se folosesc în fiecare plan $(z)_{<u>}$ pentru scrierea numerelor z de modul 1.

În cazul de față, această metrică va fi dată de

$$ds^2=\frac{4}{k^2}\,\frac{dx^2-udy^2}{(1-x^2+uy^2)^2} \tag{6}$$

pentru $|z|<1$. Ea este invariantă față de transformarea (5).

În adevăr, o putem scrie

$$ds=\frac{1}{k}\,\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

ca și în planul complex obișnuit, așa încît calculînd expresia

$$\frac{1-|'z|^2}{1-|z|^2}=\frac{1-a\bar{a}}{(1-z\bar{a})(1-\bar{z}a)}$$

și derivata lui $'z=M[z]$ cu (4), avem

$$\frac{d'z}{dz}=[C(\varphi)+hS(\varphi)](1-a\bar{a})(1-z\bar{a})^{-2}$$

de unde obținem

$$\left|\frac{d'z}{dz}\right|=(1-a\bar{a})(1-z\bar{a})^{-1}(1-a\bar{z})^{-1}$$

sau

$$\frac{|d'z|}{1-|'z|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}\,.$$

Calculînd curbura totală a varietăţii ce admite (6) ca primă formă fundamentală, cu formula [2]

$$R=-\frac{k^2}{\tau K_D}\frac{\partial^2 \ln K_D}{\partial z\partial\bar{z}}$$

şi ţinînd seama de formulele de derivare (4), obţinem în cazul nostru

$$R=-k^2, \tag{7}$$

adică o constantă negativă.

În acest fel, bazîndu-ne pe condiţiile [4] necesare pentru ca o metrică să fie riemanniană, putem afirma că reprezentarea realizată prin aplicaţia g de matrice (5) a deschisului Ω pe el însuşi este o reprezentare conformă pe $\Omega \subset E^2$ a spaţiului hiperbolic H^2, izometric cu varietatea riemanniană avînd curbura (7).

Să considerăm acum o aplicaţie g a semiplanului superior $(z)_{<u>}, y\geqslant 0$ pe $\Omega\cup\Gamma$, de matrice

$$M=\begin{pmatrix} C(\varphi)+hS(\varphi) & -a[C(\varphi)+hS(\varphi)] \\ 1 & -a \end{pmatrix} \tag{8}$$

cu $a=a_1+ha_2$, $a_2>0$; prin aceasta avem corespondenţa

$$a\to 0,\quad \bar{a}\to\infty,\quad \infty\to C(\varphi)+hS(\varphi)\in\Gamma.$$

Invarianţa formei metrice corespunzătoare varietăţii obţinute luînd $y>0$,

$$ds^2=\frac{1}{k^2}\frac{dx^2-u\,dy^2}{y^2} \tag{9}$$

a fost stabilită în [5]; de asemenea, $R=\frac{k^2}{u}$.

Deoarece putem determina g^{-1} prin matricea

$$\delta M^{-1}=\begin{pmatrix} -\bar{a} & a[C(\varphi)+hS(\varphi)] \\ -1 & C(\varphi)+hS(\varphi) \end{pmatrix} \tag{8'}$$

rezultă că spaţiul hiperbolic H^2 poate fi reprezentat în semiplanul superior al variabilei complexe $x+hy$ ($h^2=u<0$) fiind izometric cu această varietate de curbură totală negativă.

Invarianţa absolutului $z-\bar{z}=0$ ca şi a metricei (9) se realizează pentru a, b, c, d reali prin $'z=M[z]$, caz în care grupul GM este izomorf cu grupul geometriei lui Lobacevski, dar numai pentru $h^2<0$.

GEODEZICELE

Conicele fundamentale ale planelor $(z)_{<u>}$ se pot interpreta ca geodezice ale spaţiilor neeuclidiene reprezentate pe semiplanul superior.

În adevăr, pentru curbele de-a lungul cărora arcul este minim se calculează variația lui (9)

$$\delta\int ds=\delta\int\frac{\sqrt{x'^2-u}}{y}\,dy=0,$$

ceea ce are loc dacă

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)=0$$

unde $\varphi(y,\ x,\ x')=\frac{1}{y}\sqrt{x'^2-u}$.

După o primă integrare, obținem

$$\frac{dx}{dy}=\pm\frac{c_1y\sqrt{-u}}{\sqrt{1-c_1^2y^2}}.$$

a) Dacă $c_1\neq0$,

$$x=\mp\sqrt{-u}\,\frac{\sqrt{1-c_1^2y^2}}{c_1}+c_2$$

și punînd $c_1=\frac{1}{r}$, $c_2=\alpha$ (real), iar $r=ir'$ – dacă $u>0$ și $|x|<\sqrt{u}\,|y|$ sau $r=r'$ (r' – real) în toate celelalte cazuri, găsim că geodezicele varietății sînt conice fundamentale

$$(x-\alpha)^2-uy^2=-ur^2,\quad y>0. \tag{10}$$

Ele sînt ortogonale axei ox, deoarece în punctele lor de intersecție cu această axă

$$M_{1,\,2}\,(\alpha\pm r\sqrt{-u},\,0)$$

reale (în planele $(z)_E$, $(z)_P$ și $(z)_H$ – pentru cazul $r=ir'$) sau imaginare (în $(z)_H$ – pentru cazul $r=r'$), tangentele au direcția lui oy.

Aceste tangente sînt și ele geodezice, căci

b) Dacă $c_1=0$, integrînd, avem

$$x=\alpha. \tag{11}$$

Din notația $c_1=\frac{1}{r}$, citim că și în spațiul neeuclidian putem privi dreptele ca fiind imaginea limită a unor conice fundamentale cînd $r\to\infty$.

Ecuația (10), în cazurile $u\neq0$ reprezintă conice cu centru unic $C_{E,\,H}\ (\alpha,\,0)$, iar pentru $u=0$ conice cu o infinitate de centre situate pe dreapta $x=\alpha$, $C_P\ (\alpha,\,y)$. Fiind ortogonale cu ox și simetrice față de această axă, sînt suficiente două puncte diferite pentru a le determina.

Pentru $u<0$, rezultatele precedente ne permit o interpretare a lui Poincaré în semiplanul superior eliptic $(z)_E$, $y>0$ a geometriei spaţiului H^2; absolutul fiind în acest caz axa ox, iar varietate avînd curbura totală o constantă negativă.

În cazurile $u>0$ şi $u=0$ obţinem modelele altor geometrii, realizate pe varietăţi de curbură totală pozitivă, respectiv — infinită.

REPREZENTĂRI KLEIN-CAYLEI ALE PUNCTELOR ŞI DREPTELOR

Planul complex $(z)_{<u>}$ este determinat dacă se cunoaşte numărul real u, numit caracteristica planului şi notat $<u>$.

În cele ce urmează vom caracteriza prin relaţii unice diferitele geometrii plane cu ajutorul a două numere reale, astfel:

O geometrie este de caracteristică

$$<u_1,\ u_2> \tag{12}$$

dacă unghiurile sînt măsurate într-un plan $(z)_{<u_1>}$ (unghiul a două drepte concurente în O are aceeaşi măsură cu cea a arcului determinat de ele pe conica fundamentală unitate a planului (z) considerat, [6], iar distanţele — într-un plan $(z)_{<u_2>}$.

Notînd prin $(r,\ \theta)$ coordonatele polare ale unui punct M, iar prin $(\varphi,\ s)$ coordonatele polare (tangenţiale) ale unei drepte d, orice punct al unei geometrii Klein-Caylei punctuale $(P)_{<u_1,\ u_2>}$ este reprezentat prin imaginea din planul $(z)_{<u_1>}$ a numărului

$$z=T(r+)\,[C(\theta)+hS(\theta)],\quad h^2=u_1, \tag{13}$$

iar orice dreaptă a unei geometrii Klein-Caylei tangenţiale $(T)_{<u_1,\ u_2>}$ este reprezentată în planul $(z)_{<u_2>}$ prin

$$z=T(\varphi^+)\,[C(S)+hS(S)],\quad h^2=u_2, \tag{14}$$

unde

$$r^+,\ \varphi^+=\begin{cases} r,\ \varphi & u=0 \\ \dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{\varphi}{2}\,u & u\neq 0. \end{cases}$$

În notaţiile precedente mărimile φ, θ sînt unghiuri, avînd metrica eliptică, parabolică, hiperbolică după cum u_1 este negativ, nul sau pozitiv, iar r, s — distanţe, avînd metrica eliptică, parabolică, hiperbolică după cum u_2 este negativ, nul sau pozitiv.

Formulele (13) şi (14) stabilesc o corespondenţă biunivocă între punctele, respectiv — dreptele, unei geometrii plane $<u_1,\ u_2>$ şi mulţimea numerelor complexe ale unuia şi aceluiaşi plan complex, sau a două plane complexe diferite.

Aceste considerații sînt bazate pe cele ale lui I. M. Iaglom [3], care caracterizează astfel 9 geometrii plane diferite scriind pentru acestea 18 relații de tip (13) și (14) în care u_1, u_2 au valorile particulare -1, 0, $+1$, iar funcțiile trigonometrice C, S, T (x) sînt cele obișnuite.

Ele conțin drept cazuri particulare toate cele 9 geometrii menționate, dintre care exemplificăm pe cele mai des întîlnite:

$<-1, -1>$ – geometria ELIPTICĂ

punctele în $(z)_{<-1>}=(z)_{Ec}$ sînt $z=\operatorname{tg}\frac{r}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$

dreptele în $(z)_{<-1>}=(z)_{Ec}$ sînt $z=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(\cos s+i\sin s)$

$<-1, +1>$ – geometria HIPERBOLICA

punctele în $(z)_{<-1>}=(z)_{Ec}$ sînt $z=\operatorname{th}\frac{r}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$

dreptele în $(z)_{<+1>}=(z)_{He}$ sînt $z=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(\operatorname{ch} s+j\operatorname{sh} s)$

$<-1, 0>$ – geometria EUCLIDIANA

punctele în $(z)_{<-1>}=(z)_{Ec}$ sînt $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

dreptele în $(z)_{<0>}=(z)_{P}$ sînt $z=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(1+ks)$

$<+1, 0>$ – geometria PSEUDOEUCLIDIANĂ

punctele în $(z)_{+1}=(z)_{He}$ sînt $z=r(\operatorname{ch}\theta+j\operatorname{sh}\theta)$

dreptele în $(z)_{<0>}=(z)_{P}$ sînt $z=\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}(1+ks)$.

Geometria spațiului H^2 schițată anterior este $<-p, q>$ cu $p, q>0$ ale cărei puncte și drepte sînt reprezentate respectiv:

punctele în $(z)_{<-p>}=(z)_{E}$ prin $z=T_H\left(\frac{r}{2}\right)[C_E(\theta)+hS_E(\theta)]$

dreptele în $(z)_{<q>}=(z)_{H}$ prin $z=T_E\left(\frac{\varphi}{2}\right)[C_H(s)+hS_H(s)]$

unde funcțiile trigonometrice eliptice sau hiperbolice generalizate care apar au efectiv expresiile (2).

Să considerăm o geometrie plană $<u_1, u_2>$ oarecare reprezentată pe un model Klein-Caylei, avînd absolutul o conică fundamentală unitate din planul (z), nedegenerată sau degenerată, de gen eliptic, hiperbolic sau parabolic, după cum urmează din următorul tabel:

u_1, u_2		>0	<0	$=0$
$u_1 \cdot u_2 \neq 0$	u_1	hiperbolă	elipsă	*
		de ecuaţie		
nedegenerată	u_2	$x^2 - u_1 y^2 = 1$	$x^2 - u_1 y^2 = -1$	*
$u_1 \cdot u_2 = 0$	u_1	2 puncte reale	2 puncte imag.	1 punct impropriu
		situate pe		
degenerată	u_2	2 drepte reale	2 drepte imag.	1 dr. improprie

Geometriile $<u_1, u_2>$ şi $<u_2, u_1>$ sînt duale.

Reprezentarea unei geometrii punctuale $(P)_{<u_1, u_2>}$ în interiorul conicei $z\bar{z}=1$ a planului $(z)_{<u_1\Gamma>}$ prin formula (13) este dată în cazul $u_1<0$ printr-unul din modelele Poincaré ale neeuclidiene; reprezentarea unui plan euclidian $(P)_{<-p,0>}$ se face punînd în corespondenţă punctelor sale numere complexe eliptice, astfel încît devine necesară lărgirea planului respectiv cu un punct ideal, căruia îi corespunde în $(z)_{<-p>}$ numărul $z \to \infty$.

Dacă printr-o inversiune generalizată

$$M_2[\bar{z}] = {}'z, \quad (h^2 = u_1) \tag{15}$$

fiecărui punct z_1 din interiorul (sau exteriorul) absolutului îi ataşăm un punct z_2 din exteriorul (sau interiorul) acestuia şi îi punem în corespondenţă fiecărui punct al geometriei $(P)_{<u_1, u_2>}$ perechea ordonată de numere z_1, $z_2 \in (z)_{<u_1>}$, obţinem o reprezentare a geometriilor Klein-Caylei pe întregul plan complex $(z)_{<u_1>}$. Punctele geometriei considerate se zic în acest caz orientate.

În urma inversiunii de mai sus, punctele absolutului Γ sînt duse tot în puncte aparţinînd lui Γ, deoarece am văzut că aceste conice sînt invariante; acestea sînt corespondentele punctelor improprii ale planului ataşat geometriei considerate, fiind presupuse fără orientare.

Dreptele izotrope ale geometriei $(P)_{<u_1, u_2>}$ (în sensul de mulţime a punctelor ce le determină) le corespund în $(z)_{<u_2>}$ divizorii lui zero. Mulţimea acestor puncte o considerăm de asemenea neorientată deoarece în (z), mulţimea inverselor divizorilor lui zero sînt [7] numerele $\alpha\omega$ $(u=0)$, $\beta\omega_1$, $\gamma\omega_2$, σ_1, σ_2 $(u>0)$ ale căror imagini sînt situate pe dreptele izotrope invariante şi ele dată de (15).

Pentru o geometrie tangenţială $(T)_{<u_1, u_2>}$, prin (14) se stabileşte corespondenţa biunivocă între mulţimea dreptelor acestei geometrii şi mulţimea numerelor complexe din $(z)_{<u_2>}$.

Orientările dreptelor sînt date tot de perechile ordonate de puncte inverse față de conicele fundamentale unitate ale lui (z).

Geometriile tangențiale $(T)_{<u_1, u_2>}$ fiind duale geometriilor punctuale $(P)_{<u_2, u_1>}$, putem obține propoziții corespunzătoare acestora schimbînd între ele cuvintele „punct orientat" ⟷ „dreaptă orientată" și „distanță" ⟷ „unghi"; geometriile $(T)_{<u, u>}$ sînt autoduale.

Metricile și mișcările geometriilor Klein-Caylei sînt

$$ds^2 = \frac{4dz\,d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}; \quad M = \begin{pmatrix} a & a \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix}, \det M = 1$$

pentru $(P)_{<-p, -q>}$, $(P)_{<p, -q>}$, $(P)_{<0, -q>}$ și $(T)_{<-q, -p>}$, $(T)_{<q, p>}$ și $(T)_{<-q, 0>}$; analog

$$ds^2 = \frac{4dz\,d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}; \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \det M = 1$$

pentru $(P)_{<-p, q>}$, $(P)_{<p, q>}$, $(P)_{<0, q>}$ și $(T)_{<q, -p>}$, $(T)_{<q, p>}$, $(T)_{<q, 0>}$ și

$$ds^2 = dz\,d\bar{z}; \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, \det M = 1$$

pentru $(P)_{<-p, 0>}$, $(P)_{<p, 0>}$, $(P)_{<0, 0>}$ și $(T)_{<0, -p>}$, $(T)_{<0, p>}$, $(T)_{<0, 0>}$.

Conicele fundamentale ale planului $(z)_{<u>}$ obținute prin anularea formei

$$AZ\bar{Z} + PZ - \bar{P}\bar{Z} + B = 0 \tag{16}$$

cu $A = \alpha h$, $B = \beta h$ – numere pur imaginare, invariante față de transformările considerate mai sus – mișcările planelor Klein-Caylei, sînt numite ciclurile geometriilor cayliene.

În particular, dacă $P = 0$, obținem ecuația unei conice $Z\bar{Z} = -\frac{\beta}{\alpha}$ care trece în $z\bar{z} = \pm 1$ printr-o inversiune $Z = k/\bar{z}$ de putere $k = T(\rho)$, unde ρ este raza polară a unui punct situat pe ciclul considerat, dată în $(z)_{<u_1>}$ de $T(\rho) = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}$ în baza lui (13) $Z\bar{Z} = T^2(\rho)\,[C^2(\theta) - u_1 S^2(\theta)]$.

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Mihăileanu, *Geometrie Neeuclidiană*, Ed. Acad. R.S.R., 1954.
2. B. A. Fux, *Neevklidova Gheometria v teorii conformnîh i psevdokonformnîh otobrajenii*, Gostehizdat, M-L, 1951.
3. I. M. Iaglom, Proiectivnoe merooprede lenia na ploscosti i complexnîe cisla, Trudî sem po vect. i tenz. analizu, Vîp. 7, 1949.
4. J. L. Ferrand, *Géométrie différentielle*, Ed. Masson, 120, Paris, 1963.

5. P. Stanciu şi N. Boja, O generalizare a transformărilor liniare, Analele Univ. Timişoara, seria St. Mat. -Fiz., vol. IV, 1966.
6. N. Boja, Asupra unei extinderi a noţiunii de funcţie trigonometrică, Gaz. Matem., A, vol, LXXV, nr. 5, 1969.
7. N. Boja şi P. Stanciu, Despre grupul transformărilor biliniare din $(z)_{<u>}$, Analele Univ. Timişoara, seria St. Mat. -Fiz., vol. 7, 1969 Fasc. 1.

О ГЕОМЕТРИИ НЕЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ С КОНФОРМНОЙ ГРУППОЙ

(РЕЗЮМЕ)

В данной работе рассматриваются некоторые свойства групп Мебиуса, матрицы которых определяются на теле $C_{<u>}$ комплексных чисел вида $x+hy(h^2=u\in R)$ и устанавливаются области плоскости комплексного переменного $(z)_{<u>}$, изометричные неевклидовой плоскости отрицательной кривизны.

Пользуясь тригонометрическими функциями, определёнными [6] при помощи функциональных уравнений, формулы всех девяти геометрии И. М. Яглома [3] переписываются в общем виде.

SUR LA GÉOMÉTRIE PLANE NON-EUCLIDIENNE D'UN GROUPE CONFORME

(RÉSUMÉ)

On étudie le groupe de Möbius des matrices $M\in\mathfrak{M}(2, C_{<u>})$ – le groupe des matrices carrées non-singulaires dont les éléments appartiennent au corps $C_{<u>}$ des nombres complexes ayant la forme $x+hy$ $(h^2=u\in R)$ et on établit qu'une certaine région du plan complexe $(z)_{<u>}$ este isométrique avec un plan non-euclidien de cubure négative, déterminant la métrique et les géodésiques de celui-ci.

Utilisant ensuite les fonctions $C(x)$, $S(x)$, $T(x)$, caractérisées [6] par des équations fonctionnelles, sous la forme trigonométrique des nombres $z\in C_{<u>}$, on montré de quelle manière peuvent être comprises par des relations uniques toutes les 9 types de géométries considérés par I. M. Jaglom [3], représentant les points et les droites d'une géométrie Klein-Caylei de coordonnées polaires (r, θ) ou tangentielles (φ, S) par des points du plan.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848

ALGEBRE BOOLEENE ALE PERECHILOR DE PERECHI

DE

M. KISS și ST. MATEI

I. ITNRODUCERE

R. L. Goodstein în [1] studiază o algebră booleeană $\mathfrak{B}$ a perechilor de elemente. Fiecare element $X=(A, B)$ al acestei algebre este format din două elemente A, B aparținînd unei algebre booleene $\mathfrak{A}$. În această algebră se definesc complementara, reuniunea și intersecția apoi se verifică sistemul axiomatic al lui Hutington după cum urmează:

1. *Complementara.*

Prin definiție

$$\overline{X}=\overline{(A,\ B)}=(\bar{A},\ \bar{B}).$$

2. *Reuniunea.*

Prin definiție

$$X_1 \cup X_2=(A_1,\ B_1) \cup (A_2,\ B_2)=(A_1 \cup A_2,\ B_1 \cap B_2).$$

3. *Intersecția.*

Prin definiție

$$X_1 \cap X_2=(A_1,\ B_1) \cap (A_2,\ B_2)=(A_1 \cap A_2,\ B_1 \cup B_2).$$

4. Sistemul axiomatic al lui Hutington este un sistem minimal de axiome

$$\Lambda=\{L_1,\ L_1',\ L_7,\ L_7',\ L_9,\ L_9',\ L_{10},\ L_{10}'\}$$

în care:

a) L_1, L_1' sînt axiomele de comutativitate:

$$X_1 \cup X_2=X_2 \cup X_1 \text{ respectiv } X_1 \cap X_2=X_2 \cap X_1$$

b) L_7, L_7' sînt axiomele de distributivitate:

$$X_1 \cup (X_2 \cap X_3)=(X_1 \cup X_2) \cap (X_1 \cup X_3)$$

respectiv

$$X_1 \cap (X_2 \cup X_3)=(X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_2)$$

c) Se introduc elementele zero 0 și unitatea 1 și se verifică L_9, L_9':

$$X \cup \bar{X} = 1, \qquad X \cap \bar{X} = 0$$

d) Se verifică L_{10}, L_{10}':

$$X \cup 0 = X \text{ respectiv } X \cap 1 = X$$

II. ALGEBRE BOOLEENE GENERATE DE ALGEBRA PERECHILOR $B_2^0 = \{0, 1\}$

Pornind de la rezultatele prezentate de R. L. Goodstein în [1] autorii au studiat următoarele algebre booleene de perechi generate de $B_2^0 = \{0, 1\}$. (În cele ce urmează vom nota: $2^i = p_i$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.)

1. *Algebra booleeană* B_2^1

Această algebră are $\mathcal{A}_{2^{p_0}}^2 = \mathcal{A}_2^2 = 2^2 = 4$ elemente. Aceste elemente sînt:
Elementul nul: $0_2^1 = (0, 1)$
Elementul unitate: $1_2^1 = (1, 0)$
și elementele: $a_{21}^1 = (0, 0)$; $a_{22}^1 = (1, 1)$.
Se verifică că această algebră a perechilor de elemente este închisă față de reuniune, intersecție, complementare apoi se verifică sistemul axiomatic al lui Hutington.

2. *Algebra booleeană* B_2^2

Această algebră este generată de $B_2^1 = \{0_2^1, 1_2^1, a_{21}^1, a_{22}^1\}$ și are $\mathcal{A}_{2^{p_1}}^2 = \mathcal{A}_4^2 = 4^2 = 16$ elemente.
Elementul nul este $0_2^2 = [0_2^1, 1_2^1] = [(0, 1), (1, 0)]$
Elementul unitate $1_2^2 = [1_2^1, 0_2^1] = [(1, 0), (0, 1)]$
și elementele a_{2i}^2, $i = 1, 2, \ldots, 14$
obținute prin aranjamente cu repetiție $\mathcal{A}_4^2$ din 0_2^1, 1_2^1, a_{21}^1, a_{22}^1. Se verifică că această algebră este închisă față de reuniune, intersecție, complementare și sistemul axiomatic al lui Hutington.

3. *Algebra booleeană* B_2^n

În mod analog pornind de la B_2^2 putem obține o algebră booleeană a perechilor B_2^3 care are drept elemente, perechi de elemente din B_2^2. Numărul elementelor acestei algebre este:

$$\mathcal{A}_{2^{p_2}}^2 = \mathcal{A}_{16}^2 = 16^2 = 2^{r_3} = 256 \text{ elemente}$$

Elementul nul este: $0_2^3 = [0_2^2, 1_2^2]$
Elementul unitate: $1_2^3 = [1_2^2, 0_2^2]$
iar celelalte 254 elemente sînt a_{2i}^3; $i = 1, 2, \ldots, (2^{p_3} - 2)$

Procedînd prin inducție completă se poate defini algebra booleeană a perechilor de perechi B_2^n avînd ca elemente, perechi de elemente din B_2^{n-1}. Această algebră booleeană are $\mathcal{C}_{2^{pn-1}}^2 = 2^{pn}$ elemente.

Elementul nul este: $0_2^n = [0_2^{n-1}, 1_2^{n-1}]$

Elementul unitate: $1_2^n = [1_2^{n-1}, 0_2^{n-1}]$

iar celelalte elemente: a_{2i}^n pentru $i = 1, 2, \ldots, (2^{pn}-2)$

4. *Izomorfism și omomorfism booleean în algebrele booleene ale perechilor de perechi.*

Dacă din algebra booleeană B_2^n alcătuită din perechi de forma $(a_{2i}^{n-1}, a_{2j}^{n-1})$ alegem submulțimea B_2^{*n} alcătuită din elemente de forma $(a_{2i}^{n-1}, \overline{a_{2i}^{n-1}})$, ambele formate cu elemente din B_2^{n-1} în virtutea celor demonstrate B_2^{*n} constituie o algebră bool. (întrucît $0_2^n = (0_2^{n-1}, 1_2^{n-1}) = (0_2^{n-1}, \overline{0_2^{n-1}})$ și $1_2^n = (1_2^{n-1}, 0_2^{n-1}) = (1_2^{n-1}, \overline{1_2^{n-1}})$ au aceeași formă). Corespondența dintre B_2^{n-1} și B_2^{*n} este o corespondență biunivocă, căci fiecărui element $a_{2i}^{n-1} \in B_2^{n-1}$ îi corespunde o pereche $(a_{2i}^{n-1}, \overline{a_{2i}^{n-1}}) \in B_2^{*n}$ și la fiecare pereche $(a_{2i}^{n-1}, \overline{a_{2i}^{n-1}}) \in B_2^{*n}$ corespunde primul său termen $a_{2i}^{n-1} \in B_2^{n-1}$. Vom reprezenta această corespondență scriind: $B_2^{n-1} \leftrightarrow B_2^{*n}$. Această corespondență biunivocă conservă complementarea, reuniunea, intersecția, zerourile și unitățile.

Pentru complementare:

$$a_{2i}^{n-1} \leftrightarrow (a_{2i}^{n-1}, \overline{a_{2i}^{n-1}}); \quad \overline{a_{2i}^{n-1}} \leftrightarrow (\overline{a_{2i}^{n-1}}, a_{2i}^{n-1}) = (\overline{a_{2i}^{n-1}}, \overline{\overline{a_{2i}^{n-1}}}).$$

Pentru reuniune:

$$a_{2i}^{n-1} \cup a_{2j}^{n-1} \leftrightarrow (a_{2i}^{n-1} \cup a_{2j}^{n-1}, \overline{a_{2i}^{n-1}} \cap \overline{a_{2j}^{n-1}}) = (a_{2i}^{n-1}, \overline{a_{2i}^{n-1}}) \cup (a_{2j}^{n-1}, \overline{a_{2j}^{n-1}})$$

Pentru intersecție:

$$a_{2i}^{n-1} \cap a_{2j}^{n-1} \leftrightarrow (a_{2i}^{n-1} \cap a_{2j}^{n-1}, \overline{a_{2i}^{n-1}} \cup \overline{a_{2j}^{n-1}}) = (a_{2i}^{n-1}, \overline{a_{2i}^{n-1}}) \cap (a_{2j}^{n-1}, \overline{a_{2j}^{n-1}})$$

Pentru elementul nul și unitate:

$$0_2^{n-1} \leftrightarrow (0_2^{n-1}, 1_2^{n-1}) = 0_2^n = (0_2^{n-1}, \overline{0_2^{n-1}})$$

$$1_2^{n-1} \leftrightarrow (1_2^{n-1}, 0_2^{n-1}) = 1_2^n = (1_2^{n-1}, 1_2^{n-1})$$

O corespondență biunivocă între două algebre booleene care conservă complementarea, reuniunea și intersecția se numește izomorfism booleean. Deci între B_2^{n-1} și B_2^{*n} există un izomorfism booleean.

La fiecare pereche $(a_{2i}^{n-1}, a_{2j}^{n-1}) \in B_2^n$ corespunde o singură pereche $(a_{2i}^{n-1}, \overline{a_{2i}^{n-1}}) \in B_2^{*n}$ însă fiecare pereche $(a_{2i}^{n-1}, \overline{a_{2i}^{n-1}})$ este imagine a tuturor perechilor $(a_{2i}^{n-1}, a_{2j}^{n-1})$ cu primul termen a_{2i}^{n-1}. Corespondența dintre B_2^n și B_2^{*n} se numește

omomorfism booleean. Omomorfismul booleean conservă complementarea, reuniunea și intersecția. Corespondența dintre B_2^n și B_2^{n-1} este de asemenea un omomorfism booleean.

În omomorfismul perechilor care aplică B_2^n pe B_2^{n-1} toate perechile $(0_2^{n-1}, a_{2j}^{n-1})$ sînt aplicate pe 0_2^{n-1} și toate perechile $(1_2^{n-1}, a_{2j}^{n-1})$ pe 1_2^{n-1}. Între mulțimea elementelor de forma $\{(0_2^{n-1}, a_{2j}^{n-1})\}$ și mulțimea elementelor de forma $\{\overline{a_{2j}^{n-1}}\}$ există o corespondență biunivocă care conservă reuniunea și intersecția însă nu conservă complementarea. Această corespondență poartă numele de izomorfism parțial sau laticial.

BIBLIOGRAFIE

1. R. L. Goodstein, Ph. D., D. Lit., Boolean Algebra. 1963 Pergamon Press. Oxford-London-Paris-Frankfurt. The Macmillan Company. New York.
2. Gr. C. Moisil, *Scheme cu comandă directă cu contacte și relee*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1959.
3. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*. Ed. Tehnică. București 1959. pg. 65—71.
4. Sergiu Rudeanu, *Axiomele laticilor și ale algebrelor booleene*. Ed. Acad. R.P.R. București 1963.

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ ПАРЫ ПАР

(РЕЗЮМЕ)

Основывалась на результатах полученных Гудштайном [1], авторы настоящей статьи исследовали булевы алгебры пары пар элементов вида B_2^n порождаемые $B_2^0 = \{0, 1\}$, где каждый элемент является парой элементов предыдущей алгебры B_2^{n-1}.

Затем рассматривается булевый гомоморфизм и изоморфизм булевых алгебр пар элементов порождаемых $B_2^0 = \{0, 1\}$.

BOOLESCHE ALGEBREN DER ELEMENTENPAAREN

(ZUSAMMENFASSUNG)

Die Autoren beginnen die Arbeit auf die in [1] erhaltenen Ergebnise von R. L. Goodstein, und studieren die Boolesche Algebren der Elementenpaaren von der Form B_2^n, anfangend mit $B_2^0=\{0, 1\}$, in deren jedes Element ein Elemenpaar der vorherigen Algebra B_2^{n-1} ist. Nachher werden die booleischen Homomorfismen und Izomorfismen der booleschen Algebra der Elementenpaaren die aus $B_2^0=\{0, 1\}$ erzeugt werden, studiert.

APROXIMAREA FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

DE

M. NEAGU

1. Fie $L_{2\pi}$ clasa funcțiilor f de n variabile, 2π – periodice în raport cu fiecare variabilă, integrabile Lebesgue în $[0, 2\pi]^n$.

Vom nota cu a_k^δ, $k=(k_1, k_2, \ldots, k_n)\in N^n$, $\delta=(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, δ_i luînd independent valorile 0 și 1 cei 2^n coeficienți Fourier ai funcției f pentru fiecare k fixat și cu

$$A_k(x)=\sum_\delta a_k^\delta \sin\left(\frac{\pi}{2}\delta+kx\right) \tag{1}$$

unde

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\frac{\pi}{2}\delta+kx=\left(\frac{\pi}{2}\delta_1+k_1x_1, \frac{\pi}{2}\delta_2+k_2x_2, \ldots, \frac{\pi}{2}\delta_n+k_nx_n\right)$$

Fie $\theta_k=\frac{1}{2^i}$ unde i este numărul proiecțiilor lui k egale cu zero.

Considerăm șirurile de funcții $\rho_k(\xi)$ uniform mărginite pe o mulțime E^n a spațiului $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ și $\rho_0(\xi)=1$ pentru care seria

$$U(t;\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k\rho_k(\xi)\cos kt \tag{2}$$

converge uniform în raport cu fiecare variabilă t_i în $[0, 2\pi]^n$ pentru orice $\xi\in E^n$ fixat și unde

$$(t;\xi)=(t_1, t_2\ldots, t_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

$$\cos kt=\cos k_1t_1\cos k_2t_2\ldots\cos k_nt_n.$$

Fie

$$f(x;\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k\rho_k(\xi)A_k(x) \tag{3}$$

Înlocuind valorile coeficienților Fourier obținem

$$f(x;\xi)=\frac{1}{\pi^n}\int_0^{2\pi} f(t)\,U(t-x)\,dt \tag{4}$$

unde

$$t-x=(t_1-x_1,\ t_2-x_2,\ \ldots,\ t_n-x_n)$$

$$dt=dt_1\,dt_2\ldots dt_n$$

2. Să notăm cu $Z(\alpha)$, $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$, $0<\alpha_l\leqslant 2$ clasa funcțiilor $f\in L_{2\pi}$ pentru care

$$\max_x |\Delta_t^{(n)} f(x)| \leqslant 2^n \sum_{l=1}^{n} t_l^{\alpha_l} \tag{5}$$

unde

$$\Delta_t^{(n)} f(x)=\sum_{\varepsilon} f(x+\varepsilon t)-2^n f(x) \tag{6}$$

unde

$$\varepsilon=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n)$$

$$x+\varepsilon t=(x_1+\varepsilon_1 t_1,\ x_2+\varepsilon_2 t_2,\ \ldots,\ x_n+\varepsilon_n t_n)$$

și unde ε_l iau independent valorile -1 și $+1$.

Fie de asemenea și mulțimea

$$M_\alpha(\xi)=\sup_{f\in Z(\alpha)}\{\max_x |f(x)-f(x;\ \xi)|\}. \tag{7}$$

Se observă că

$$f(x;\ \xi)-f(x)=\frac{1}{\pi^n}\int_0^\pi \{\Delta_t^{(n)} f(x)\}\, U(t;\xi)\, dt. \tag{8}$$

În această lucrare vom da o aproximare asimptotică care generalizează rezultatele cunoscute [1], [2] cu ajutorul unei teoreme în care O este binecunoscutul simbol al lui Landau.

Teoremă. Dacă $U(t;\ \xi)$ sînt nenegative (nepozitive) pentru $t\in[0,\ \pi]^n$, $\xi\in E^n$ și dacă $0<\alpha_l<2$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ atunci

$$M_\alpha(\xi)=\frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{n}\left|\Gamma(\alpha_l)\sin\frac{\pi\alpha_i}{2}\sum_{k_l=0}^{n}\frac{\Delta\rho_{k_l}(\xi)}{\left(k_l+\frac{1}{2}\right)\alpha_l}\right|+O\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k_i=0}^{\infty}\frac{\Delta\rho_{k_l}(\xi)}{\left(k_l+\frac{1}{2}\right)^2}\right)$$

unde

$$\Delta\rho_{k_l}(\xi)=\rho_{0,\ldots,k_i,\ldots,0}-\rho_{0,\ldots,k_l+1,\ldots,0}$$

Demonstrație: Este evident că

$$|f(x;\ \xi)-f(x)|<\frac{2^n}{\pi^n}\int_0^\pi\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\alpha_i}\right\}U(t;\ \xi)dt$$

Pe de altă parte

$$\frac{2^n}{\pi^n}\int_0^\pi t_i^{\alpha_i}\,U(t;\ \xi)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi t_i^{\alpha_i}\,u_l(t_l;\ \xi)\,dt_l$$

unde

$$u_l(t_l;\xi)=\frac{1}{2}+\sum_{k_l=1}^{\infty}\rho_{0,\ldots,k_l,\ldots,0}\cos k_l t_l$$

Se știe [1] că

$$\sum_{k_l=0}^{\infty}\Delta\rho_{k_l}(\xi)\sin\left(k_l+\frac{1}{2}\right)t_l=2\sin\frac{t_l}{2}\,u_l(t_l;\xi)$$

Astfel obținem

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t_i^{\alpha_l}u_i(t_l;\xi)\,dt_l=\frac{2}{\pi}\sum_{k_l=0}^{\infty}\Delta\rho_{k_l}(\xi)I_{k_l}$$

unde

$$I_{k_l}=\int_0^{\pi}t_i^{\alpha_l}\frac{\sin\left(k_l+\frac{1}{2}\right)t_l}{2\sin\frac{t_l}{2}}\,dt_l$$

și deoarece [1]

$$I_{k_l}=\frac{\Gamma(\alpha_l)\sin\frac{\pi\alpha_l}{2}}{\left(k_l+\frac{1}{2}\right)^{\alpha_l}}+O\left(k_l+\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

rezultă teorema.

3. Ne propunem să rezolvăm ecuația funcțională

$$\Delta_t^{(n)}f(x)=0 \tag{9}$$

oricari ar fi valorile parametrilor t_l.

Pentru $t_2=t_3=\ldots=t_n=0$ obținem

$$f(x_1+t_1;\ x_2,\ \ldots,\ x_n)+f(x_1-t_1;\ x_2,\ \ldots,\ x_n)-2f(x_1;\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0$$

de unde

$$f(x_1;\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=A(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)\,x_1+B(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n).$$

Schimbînd rolul lui x_1 respectiv de $n-1$ ori cu celelalte $n-1$ variabile rezultă că soluția generală continuă a ecuației funcționale (9) oricari ar fi valorile parametrilor $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ este

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=a_0+a_1^1x_1+a_1^2x_2+\ldots+a_1^nx_n+a_1^{12}x_1x_2+$$
$$+a_2^{13}x_1x_3+\ldots+a_2^{n-1n}x_{n-1}x_n+\ldots+a_nx_1x_2\ldots x_n \tag{10}$$

4. Soluţia (10) a ecuaţiei funcţionale (9) ne poate indica un procedeu direct de generalizare a problemei propuse de la cazul unidimensional [1] la cazul mai multe variabile.

În adevăr, considerînd şirurile de funcţii $\varphi_{k_i}(\xi)$, $k_i=1, 2, \ldots, n, \ldots$, uniform mărginite pe mulţimea E^n pentru care

$$u_i(t_i; \xi)=\frac{1}{2}+\sum_{k_i=1}^{\infty}\varphi_{k_i}(\xi)\cos k_i t_i$$

$$u_i(t_i; \xi)\geqslant 0 \quad (0\leqslant t_i\leqslant\pi)$$

converg uniform, se poate lua drept serie

$$U(t; \xi)=\prod_{i=1}^{n}u_i(t_i; \xi)$$

în care forma factorilor şi a termenilor este corespondentă cu forma factorilor şi a termenilor soluţiei (10).

BIBLIOGRAFIE

1. L. I. Bausov, On the approximation of Z_a-class functions by positive methods for summation of Fourior series (in Russian), Usp. Mat. Nauk, 16(1961), no. 3 (99), 143—149.
2. P. Pych, Approximation of functions in L and C-metrics, Prace Mat., 11 (1967), seria I, 61—71.
3. R. Taberski, On double integrals and Fourier series, Ann. Pol. Math. 15 (1964), 97—115.
4. Ch. N. Moore, *Summable series and convergence factors*, New York, 1938.

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(РЕЗЮМЕ)

Рассматривается класс функций периодических по каждой переменной отдельно, непрерывных в $[0, 2\pi]^n$ для которых имеется (5) при (6), где $0<\alpha_i\leqslant 2$. Для этого класса функций даётся одна теорема аппроксимации, обобщающая некоторые результаты Л. И. Баусова и П. Пиха для функций одного переменного и двух переменных.

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

(RÉSUMÉ)

On considère la classe de fonctions périodiques par rapport à chaque variable continues dans $[0, 2\pi]^n$ pour lesquelles on a (5) avec (6), où $0<\alpha_i\leqslant 2$. Pour cette classe de fonctions on donne un théorème d'approximation en généralisant certaines résultats de L. I. Bausov et P. Pych donnés pour les fonctions d'une variable, respectivement de deux variables.

SUR DES EQUATIONS FUNCTIONNELLES

PAR

N. NEAMȚU

1. Dans [1] on a déterminé les functions réelles de variable réelle pour lesquelles on a :

$$[f;\ x, y, z]=\varphi\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \tag{1}$$

où est une fonction arbitraire. On a trouvé les résultats suivants :

a) Si $f(x)$ satisfait l'équation (1), alors

$$f(x)=ax^2+bx+c. \tag{2}$$

b) Si $f(x)$ satisfait l'équation (1), alors

$$\varphi\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\equiv C. \tag{3}$$

c) En tenant compte de l'équation différentielle-fonctionnelle :

$$[f;\ x,\ y,\ z[=F\left[\xi, f(\xi), \ldots, f^{(m)}(\xi),\ g(\xi), \ldots, g^{(m)}(\xi)\right] \tag{4}$$

où $\xi=\frac{x+y+z}{3}$, et $F(u_0, v_0, \ldots, v_n, w_0, \ldots, w_m)$ est une fonction donnée, on a établi que, si $f(x)$ satisfait (4), alors $f(x)=ax^2+bx+c$ et $g(x)$ vérifient l'équation différentielle.

$$F\left[x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x), g(x), \ldots, g^{(m)}(x)\right]=c. \tag{5}$$

Ces résultats constituaient une généralisation des résultats obtenus dans [2], [3] et [4].

Notons que certaines généralisations dans l'autre sens se trouvent dans [5].

2. Dans ces notes-ci nous nous proposons d'obtenir des résultats plus générals comme dans [1], en prenant le membre gauche comme terme libre du polynome d'interpolation de Lagrange pour la fonction $f(x)$ pour les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous considérons :

$$[f;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n] \overset{\text{df}}{=} \frac{W(f;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)}{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{6}$$

où $W(f, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un déterminant d'ordre n qui a sur la ligne générale x_i, x_i^2, $\ldots$, x_i^{n-1} $f(x_i)$ et $V_n(x_1, \ldots, x_n)$ est le déterminant Vandermonde d'ordre n.

Nous nous proposons de déterminer les fonctions réelles de variable réelle pour lesquelles nous avons :

$$[f;\ x_1,\ x_2,\ \ldots \mid x_n = \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \tag{7}$$

φ étant une fonction arbitraire.

3. L e m m e l. *Si*

$$[f;\ x_1,\ \ldots,\ x_n]=0 \tag{8}$$

pour tout $x_i \neq x_j$ *et* $i \neq j$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, *alors*

$$f(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x \tag{9}$$

avec a_k $(k=0,\ \ldots,\ n-2)$ *arbitraires.*

En diveloppant $W(f,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ d'aprés la dernière colonne, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} f(x_i)\, x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_n V_{n-1}(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n)=0 \tag{10}$$

où V_{n-1} représente les déterminants Vandermonde d'ordre $n-1$ pour les variables indiqueés entre paranthèse.

En faisant $x_1=x$, $x_i=x_{i0}$ $(i=2,\ \ldots,\ n)$ et $x_{i0} \neq x_{j0}$ en résulte l'affirmation (9).

4. *En mettant dans* (7)

$$\begin{cases} x_1 = u + \sum_{i=1}^{n-1} v_i \\ x_j = u - v_{j-1} \quad \text{pour} \quad j=2,\ 3,\ \ldots,\ n \end{cases} \tag{11}$$

nous obtenons

$$\frac{\varphi_1(u,\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1})\, f\left(u+\sum_{i=1}^{n} v_i\right) + \ldots + \varphi_n(u,\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1})\, f(u-v_{n-1})}{(-1)^{n-1}(2v_1+v_2+\ldots+v_{n-1})\ldots(v_1+v_2+\ldots+2v_{n-1})(v_1-v_2)(v_{n-2}-v_{n-1})} = \varphi(u) \tag{12}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_1(u,\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1}) &= (u-v_1)\ldots(u-v_{n-1})\, V_{n-1}(u-v_1,\ \ldots,\ u-v_{n-1})\,(-1)^{n-1} \\ &\vdots \\ \varphi_n(u,\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1}) &= (-1)^{2n}(u+v_1+\ldots+v_{n-1})(u-v_1)\ldots(u-v_{n-2})\, V_{n-1}(u+ \\ &\qquad +v_1+\ldots+v_{n-1},\ u-v_{n-2}). \end{aligned} \tag{13}$$

Il est facile d'obtenir :

Lemme 2. *Si*

$$\frac{F(u, v_1, \ldots, v_{n-1})}{G(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})} = \varphi(u) \tag{14}$$

et $G(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ *est une fonction homogène du degré* $\frac{n(n-1)}{2}$ *pour* $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ *alors la fonction* $F(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ *est homogène de meme degrè par rapport à* $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$.

Nous avons ce cas dans (12). Donc, nous obtenons

Lemme 3. *Si* $f(x)$ *vérifie l'equation* (7) *alors la fonction*

$$F(u, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \varphi_1 f(u+v_1+\ldots+v_{n-1}) + \ldots + \varphi_n f(u-v_{n-1}) \tag{15}$$

est une fonction homogène du degré $\frac{n(n-1)}{2}$ par rapport aux variables $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$

$$F(u, tv_1, tv_2, \ldots, tv_{n-1}) = t^{\frac{n(n-1)}{2}} F(u, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \tag{16}$$

5. Nous montrerons que la fonction $F(u, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ est determinée par la fonction (15), (où φ_i, sont donnes par (13)) et la propriété (16).

En notant dans (16) $t = \frac{1}{v_1}$ nous obtenons:

$$F(u, v_1, \ldots, v_{n-1}) = v_1^{\frac{n(n-1)}{2}} F\left(u, 1, \frac{v_2}{v_1}, \ldots, \frac{v_{n-1}}{v_1}\right). \tag{17}$$

En multipliant par $u^{\frac{n(n-1)}{2}}$ et en faisant ensuite $v_1 = 1$ nous avons

$$F(u, u, uv_2, \ldots, uv_{n-1}) = u^{\frac{n(n-1)}{2}} F(u, 1, v_2, \ldots, v_{n-1}). \tag{18}$$

D'autre part, nous pouvons obtenir de (15) directement.

$$F(u, u, uv_2, \ldots, uv_{n-1}) = \varphi_2(u, u, uv_2, \ldots, uv_{n-1}) f(0). \tag{19}$$

Mais,

$$\varphi_2(u, u, uv_2, \ldots, uv_{n-1}) = (-1)^{n+2} u^{\frac{n(n-1)}{2}} (2+v_2+\ldots+v_{n-1}) \cdot$$
$$\cdot(1-v_2)\ldots(1-v_{n-1}) V_{n-1}(2+v_2+\ldots+v_{n-1}, 1-v_2, \ldots, 1-v_{n-1}) \tag{20}$$

donc

$$F(u, 1, v_2, \ldots, v_{n-1}) = (-1)^{n+2} (2+v_2+\ldots+v_{n-1}) \cdot$$
$$\cdot(1-v_1)\ldots(1-v_{n-1}) V_{n-1}(2+v_2+\ldots+v_{n-1}, 1-v_1, \ldots, 1-v_{n-1}) a_{n-1} \tag{21}$$

où a_{n-1} est une constante arbitraire

$$f(0) = a_{n-1} \tag{22}$$

6. En tenant compte de (17) nous pouvons conclure

$$F(u, v_1, \ldots, v_{n-1}) = (-1)^{n+2} a_{n-1} (2v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}) \cdot \cdot(v_1-v_2)\ldots(v_1-v_{n-1})\, V_{n-1}(2v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}, v_1-v_2, \ldots, v_1-v_{n-1}) \tag{23}$$

En faisant les calcules dans le membre droit, nous obtenons

$$F(u, v_1, \ldots, v_{n-1}) = (-1)^{n-1} a_{n-1} V_n (u+v_1+\ldots+v_{n-1}, \ldots, u-v_{n-1}) \tag{24}$$

D'autre part,

$$\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n = (-1)^{n-1} V_n (u+v_1+\ldots+v_{n-1}, u-v_1, \ldots, u-v_{n-1}) \tag{25}$$

Ayant en consideration (15), (24) et (25) nous obtenons.

$$[f-a_{n-1}, u+v_1+\ldots+v_{n-1}, u-v_1, \ldots, u-v_{n-1}] = 0 \tag{26}$$

$$[f-a_{n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_n] = 0. \tag{27}$$

En tenant compte du lemme 1, nous pouvons énoncer le

Théorème 1. *Si $f(x)$ satisfait l'équation* (7), *alors nous avons :*

$$f(x) = a_0 x^{n-1} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1} \tag{28}$$

7. Le résultat § 3 peut etre énoncer par le

Théorème 2. *Si $f(x)$ satisfait l'équation* (7), *alors*

$$\varphi(u) \equiv a_{n-1}$$

En fait, en revenant à la formule (24) aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nous déduisons :

$$W(f; x_1, \ldots, x_n) = a_{u-1} V_n (x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{29}$$

D'où il résulte :

$$[f; x_1, x_2, \ldots, x_n] = a_{n-1} \tag{30}$$

De l'équation (30) an peut déduire directement le

Lemme 4. *Si $f(x)$ satisfait l'équation* (30) *pour tout $x_i \neq x_j$, quand $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ alors il est donnée par* (28).

Il suffit de prendre $x_1 = x$ et $x_k = x_{k0}$ pour $k = 2, \ldots, n$ pour s'assurer que la propriété est vraie.

8. Soit donnée la classe d'equations fonctionnelles

$$[f; x_1, \ldots, x_n] = F[\xi, f(\xi), \ldots, f^{(n)}(\xi), g(\xi), \ldots, g^{(m)}(\xi)] \tag{31}$$

où $\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $F(u_0, v_0, \ldots, v_n w_0, \ldots, w_m)$ une fonction donnée.

De §§ précédents il résulte le

Théorème 3. *Si $f(x)$ satisfait l'équation* (31), *alors $f(x)$ donnée par* (28) *et $g(x)$ vérifie l'équation différentielle*

$$F[x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x), g(x), \ldots, g^{(m)}(x)] = a_{n-1}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Crstici, N. Neamțu, Sur une équation fonctionnelle Publications de la Faculté dé lectrotehnique de l'Université a Belgrade 283 (1969) 53—59.
2. B. Choczewski, M. Kuczma, Sur certaines équations fonctionnelles considéreés par I. Stamate, Mathematicę 9 (32) (1967) 9—15.
3. I. Stamate, O proprietate a parabolei și integrarea unei ecuații funcționale. Lucr. șt. Inst. polit. Cluj, 1959, pp. 101—106.
4. I. Stamate, Observații în legătură cu o ecuație funcțională, Lucr. șt. Inst. polit. Cluj, 1959, pp. 106—110.
5. A. Viciu, In legătură cu o generalizare a unei ecuații funcționale a lui D. Pompeiu, I. I. Stamate. Bul. St. al I. P. Cluj 1967, pp. 61—70.

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(РЕЗЮМЕ)

В данной записке определяются реальные функции реальной переменной величины для которой имеется (7) и находятся следующие результаты.

а) Если $f(x)$ удовлетворяет уравнение (7), тогда $f(x)$ данный уравнением (28) ;

б) Если $f(x)$ удовлетоворяет уравнение (7), тогда $\varphi(u)\equiv a_{n-1}$

с) Если $f(x)$ удовлетоворяет уравнение (31), тогда $f(x)$ данный уравнением (28) и $g(x)$ проверяет уравнение (32).

ASUPRA UNOR ECUAȚII FUNCȚIONALE

REZUMAT

In prezenta notă se determină funcțiile reale de variabilă reală pentru care avem (7) și se găsesc următoarele rezultate:

a) Dacă $f(x)$ satisface ecuația (7), atunci $f(x)$ este dat de (28).

b) Dacă $f(x)$ satisface ecuația (7), atunci $\varphi(u)\equiv a_{n-1}$.

c) Dacă $f(x)$ satisface ecuația (31), atunci $f(x)$ dat de (28) și $g(x)$ verifică ecuația (32).

FOURIER SERIES FOR GENERALISED HYPERGEOMETRIC POLYNOMIALS

By

M. SHAH

(India)

1. Introduction: The generalised hypergeometric polynomial ([6], eqn. (2.1)) is defined by

$$F_n(x) = x^{(\delta-1)n}\, {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_1,\cdots\cdots,a_p \\ b_1,\cdots\cdots,b_q\end{matrix};\ \lambda x^c\right] \tag{1.1}$$

where δ and n are positive integers, the symbol $\Delta(\delta,-n)$ represents the set of δ – parameters $\frac{-n}{\delta}$, $\frac{-n+1}{\delta}$, ... $\frac{-n+\delta-1}{\delta}$. The polynomial is in a generalised form which yields many known polynomials on specialising the parameters.

We shall frequently use the contracted notation

$${}_pF_q(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_p \\ b_q\end{matrix}\middle| x\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a_p)_r x^r}{(b_q)_r r!}.$$

Thus $(a_p)_r$ is to be interpreted as $\prod_{j=1}^{p}(a_j)_r$ and similarly $(b_q)_r$.

The object of the present paper is to establish the following two Fourier series expansions for the generalised hypergeometric polynomials.

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sin(2r+1)\theta}{(2r+3)(4r^2-1)}\, x^{(\delta-1)n}\, {}_{p+\delta+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2} \\ b_q,\ \frac{3}{2}-r,\ \frac{5}{2}+r\end{matrix};\ \lambda x^c\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{8}(\sin\theta)^2\, x^{(\delta-1)n}\, {}_{p+\delta+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p,\ \frac{5}{2} \\ b_q,\ 2\end{matrix};\ \lambda x^c \sin^2\theta\right]. \tag{1.2}$$

where $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\cos r\theta}{(4r^2-1)} x^{(\delta-1)n}\, {}_{p+\delta+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2} \\ b_q,\ \frac{3}{2}-r,\ \frac{3}{2}+r\end{matrix};\ \lambda x^c\right] =$$

$$= \frac{1}{2} x^{(\delta-1)n}\, {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p \\ b_q\end{matrix};\ \lambda x^c\right] - \frac{\pi}{4} x^{(\delta-1)n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\times\, {}_{p+\delta+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p,\ \frac{3}{2} \\ b_q,\ 1\end{matrix};\ \lambda x^c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right], \tag{1.3}$$

where $0<\theta\leqslant\pi$.

To prove (1.2) and (1.3), we require the following Fourier series established by Mac-Robert ([4], p. 79 and [5], p. 143).

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2-s)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)} (\sin\theta)^{1-2s} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s)_r}{(2-s)_r} \sin(2r+1)\theta, \tag{1.4}$$

where $0\leqq\theta\leqq\pi$, $\operatorname{Re}(s)\leqq\frac{1}{2}$.

$$\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-2s} = 1 + 2\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s)_r}{(1-s)_r} \cos r\theta, \tag{1.5}$$

where $0<\theta\leqq\pi$.

2. Proof: To prove (1.2), express the hypergeometric polynomial on the left of (1.2) in series, on changing the order of summations which is easily seen to be justified, the expression becomes

$$-\frac{1}{3}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_s (a_p)_s \lambda^s}{s!\,(b_q)_s} x^{cs+(\delta-1)n} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}-s\right)_r}{\left(\frac{5}{2}+s\right)_r} \sin(2r+1)\theta\right),$$

using (1.4) with s replaced by $-\frac{1}{2}-s$, we have the form

$$-\frac{\pi}{8}(\sin\theta)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_s (a_p)_s \left(\frac{5}{2}\right)_s \lambda^s}{s!\,(2)_s\,(b_q)_s} x^{cs+(\delta-1)n} (\sin\theta)^{2s}$$

which is just the expression on the right of (1.2). Thus (1.2) is the Fourier sine series for the generalised hypergeometric polynomial. Similarly using (1.5) with s replaced by $-\frac{1}{2}-s$, we obtain the Fourier cosine series (1.3) for the polynomial.

3. (A). Particular Cases of (1.2) with $\delta=c=\lambda=1$:

With $a_1=n+\alpha+\beta+1$, $b_1=1+\alpha$, $b_2=\frac{1}{2}$ and multiplying both sides by $\frac{(1+\alpha)}{n!}n$, we obtain

$$-\frac{\pi}{8}(\sin\theta)^2 f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ldots\ldots,a_p,\ \frac{5}{2}\\ b_3,\ldots\ldots,b_q,\ 2\end{matrix};\ x\sin^2\theta\right)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sin(2r+1)\theta}{(2r+3)(4r^2-1)}f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ldots,a_p,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\\ b_3,\ldots,b_q,\ \frac{3}{2}-r,\ \frac{5}{2}+r\end{matrix};\ x\right), \qquad (3,1)$$

where

$$f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ldots\ldots,a_p\\ b_3,\ldots\ldots,b_b\end{matrix};\ x\right)=\frac{(1+\alpha)n}{n!}\,{}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,\ n+\alpha+\beta+1,\ a_2,\ldots,a_p\\ 1+\alpha,\ \frac{1}{2},\ b_3,\ldots,b_q\end{matrix};\ x\right]$$

is a generalised Sister Celine's polynomial ([6], eqn. (2.2)) which reduces to Sister Celine's polynomial ([1], p. 806, eqn (1)) when $\alpha=\beta=0$.

In (3.1), with $p=q=4$, $a_2=\xi$, $a_3=\frac{1}{2}$, $a_4=2$, $b_3=p$, $b_4=\frac{5}{2}$, we obtain the result for $H_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_3,\ p,\ x\sin^2\theta)$ a generalised Rice's polynomial ([2], p. 158, eqn. (2.3)). Further, setting $\xi=p$ yields the result for $P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x\sin^2\theta)$ the Jacobi polynomial.

3. (B). Particular Cases of (1.2) with $\delta=2$, $c=-2$:

(I) Substituting $p=2$, $q=3$, $a_1=\gamma-\beta$, $a_2=2$, $b_1=\gamma$, $b_2=1-\beta-n$, $b_3=\frac{5}{2}$, $\lambda=1$ and multiplying both sides by $\frac{2^n(\beta)}{n!}n$, we have

$$-\frac{\pi}{8}(\sin\theta)^{n+2}R_n\left(\gamma,\ \beta;\ \frac{x}{\sin\theta}\right)=$$

$$=\frac{(2x)^n(\beta)_n}{n!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sin(2r+1)\theta}{(2r+3)(4r^2-1)}\,{}_5F_4\left[\begin{matrix}\Delta(2,-n),\ 2,\ \gamma-\beta,\ \frac{3}{2}\\ \gamma,\ 1-\beta-n,\ \frac{3}{2}-r,\ \frac{5}{2}+r\end{matrix};\ x^{-2}\right], \qquad (3.2)$$

where $R_n(\gamma,\ \beta;\ x)$ is a Bedient's polynomial ([3], p. 297, eqn. (1)).

(II) Setting $p=q=1$, $a_1=2$, $b_1=\frac{5}{2}$, $\lambda=-1$ and multiplying both sides by 2^n, we obtain

$$-\frac{\pi}{8}\sin(\theta)^{n+2}H_n\left(\frac{x}{\sin\theta}\right)=(2x)^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sin(2r+1)\theta}{(2r+3)(4r^2-1)}\,{}_4F_2\left[\begin{matrix}\Delta(2,-n),\ 2,\ \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}-r,\ \frac{5}{2}+r\end{matrix};\ -x^{-2}\right] \tag{3.3}$$

where $H_n(x)$ is a Hermite polynomial.

4. Some deductions: From (1.2) and (1.3), we can easily deduce the following integrals:

$$\int_0^{\pi}\sin(2r+1)\theta(\sin\theta)^2\,x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p,\ \frac{5}{2}\\ b_q,\ 2\end{matrix};\ \lambda x^c\sin^2\theta\right]d\theta=$$

$$=-\frac{4}{(2r+3)(4r^2-1)}\,x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\\ b_q,\ \frac{3}{2}-r,\ \frac{5}{2}+r\end{matrix};\ \lambda x^c\right], \tag{4.1}$$

and

$$\int_0^{\pi}\cos r\theta\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p,\ \frac{3}{2}\\ b_q,\ 1\end{matrix};\ \lambda x^c\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\right]d\theta=$$

$$=-\frac{2}{(4r^2-1)}\,x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}\Delta(\delta,-n),\ a_p,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\\ b_q,\ \frac{3}{2}-r,\ \frac{3}{2}+r\end{matrix};\ \lambda x^c\right]. \tag{4.2}$$

4. (A). Particular Cases of (4.1) with $\delta=c=\lambda=1$:

Taking $a_1=n+\alpha+\beta+1$, $b_1=1+\alpha$, $b_2=\frac{1}{2}$ and multiplying both sides by $\frac{(1+\alpha)}{n!}\,n$, we have

$$\int_0^{\pi}\sin(2r+1)\,\theta\,(\sin\theta)^2\,f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ldots,a_p,\ \frac{5}{2}\\ b_3,\ldots,b_q,\ 2\end{matrix};\ x\sin^2\theta\right)d\theta=$$

$$=-\frac{4}{(2r+3)(4r^2-1)}\,f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ldots,a_p,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\\ b_3,\ldots,b_q,\ \frac{3}{2}-r,\ \frac{5}{2}+r\end{matrix};\ x\right). \tag{4.3}$$

In (4.3), with $p=q=4$, $a_2=\xi$, $a_3=\frac{1}{2}$, $a_4=2$, $b_3=p$, $b_4=5/2$, we obtain the result for $H_n^{(\alpha,\beta)}(\xi,\ p,\ x\sin^2\theta)$ which reduces to $P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x\sin^2\theta)$ when $\xi=p$.

4 (B). Particular Cases of (4.1) with $\delta=2$, $c=-2$:

(I) Setting $p=2$, $q=3$, $a_1=\gamma-\beta$, $a_2=2$, $b_1=\gamma$, $b_2=1-\beta-n$, $b_3=5/2$, $\lambda=1$ and multiplying both sides by $\frac{2^n(\beta)}{n!}n$, we obtain

$$\int_0^\pi \sin(2r+1)\theta\,(\sin\theta)^{n+2}R_n\left(\beta,\gamma;\ \frac{x}{\sin\theta}\right)d\theta=$$

$$=-\frac{4(x)^n(\beta)n}{n!(2r+3)(4r^2-1)}\,{}_5F_4\left[\begin{matrix}\Delta(2,-n), & 2, & \gamma-\beta, & \frac{3}{2} \\ \gamma, & 1-\beta-n, & \frac{3}{2}-r, & \frac{5}{2}+r\end{matrix};\ x^{-2}\right]. \quad (4.4)$$

(II) Substituting $p=q=1$, $a_1=2$, $b_1=5/2$, $\lambda=-1$ and multiplying both sides by 2^n, we get

$$\int_0^\pi \sin(2r+1)\theta\,(\sin\theta)^{n+2}H_n\left(\frac{x}{\sin\theta}\right)d\theta=$$

$$=-\frac{4(2x)^n}{(2r+3)(4r^2-1)}\,{}_4F_2\left[\begin{matrix}\Delta(2,-n), & 2, & \frac{3}{2} \\ & & \frac{3}{2}-r, & \frac{5}{2}+r\end{matrix};\ -x^{-2}\right]. \quad (4.5)$$

I wish to express my sincere thanks to Dr. V. M. Bhise, Shri G. S. Tech. Institute, Indore for his king supervision in the preparation of this paper. I am also thankful to Dr. S. M. Das Gupta, Principal, Shri G. S. Tech. Institute, Indore for the facilities he gave to me.

REFERENCES

1. Fasenmyer, Sister, M. Celine, Some Generalised hypergeometric polynomials. Bull. Amer. Math. Soc., 53, (1947), pp. 806—812.
2. P. R. Khandekar, On a generalization of Rice's polynomial-1. Proc. of the National Academy of Sciences, India, Section A, Vol. XXXIV, Part II, 1964, pp. 157—162.
3. E. D. Rainville, *Special Functions,* New York (1960).
4. T. M. Mac Robert, Fourier Series for *E*-functions Math. Zeitschr. 75, 79—82 (1961).
5. T. M. Mac Robert, Infinite series of *E*-functions Math. Zeitschr. 71, 143—145 (1959).
6. Shah, Manilal, Certain integrals involving the product of two generalised hypergeometric polynomials. Proc. of the national Academy of Sciences, India, Section A, Vol. XXXVII, Part I, 1967, 79—96.

РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

(РЕЗЮМЕ)

Исходя из гипергеометрического обобщенного многочлена определенного соотношение (II), (см. [6]), в настоящей работе устанавливаются два ряда Фурье для обобщенных гипергеометрических многочленов (I.2) и (1.3).

Устанавливаются интегралы (4.1) и (4.2), а также приводятся частные случаи исходящие из (1.2) и (4.1).

SERII FOURIER PENTRU POLINOAME HIPERGEOMETRICE GENERALIZATE

(REZUMAT)

În această lucrare, plecînd de la polinomul hipergeometric generalizat definit de (1.1), (vezi [6], ecuaţia (2.1), se stabilesc două serii Fourier pentru polinoame hipergeometrice generalizate (1.2) şi (1.3). Stabileşte şi integralele (4.1) şi (4.2), iar pe urmă dă cazuri particulare deduse din (1.2) şi (4.1).

POLINOAME CE AU RĂDĂCINILE RAȚIONALE ÎN ACELAȘI TIMP CU DERIVATELE LOR

DE

I. STURZ

Printre multele proprietăți de care se bucură polinoamele peste un corp dat și în special peste corpul numerelor raționale, ne propunem să punem în evidență o clasă de polinoame, chiar dacă ea va apare în lucrarea de față destul de puțin evidențiată, datorită dificultăților de a aborda această problemă în general, clasă care să conțină ca elemente ale sale, plinoame de un grad dat cu coeficienți raționali, înzestrate cu proprietatea că rădăcinile lor și ale derivatelor lor să fie tot raționale.

Evident, această problemă e suficient să se rezolve numai în cazul polinoamelor cu coeficienți întregi și impunînd condiția ca un astfel de polinom și derivata sa să aibă rădăcinile întregi.

Înainte de a intra în miezul problemei vom arăta cum una din căile încercate pentru atacarea ei permite deducerea, într-un mod cît se poate de simplu și de direct, a unor identități algebrice exprimate prin determinanți de tip Vandermonde și înrudiți cu aceștia.

I. CÎTEVA IDENTITĂȚI ALGEBRICE

Să considerăm un polinom

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

pe care în acest caz, îl considerăm cu coeficienții dintr-un corp numeric arbitrar, dar cu toate rădăcinile distincte. Vom nota prin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rădăcinile acestui polinom și cu $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$, rădăcinile derivatei sale $P'(x)$, care evident vor fi determinate de către rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Punînd în evidență descompunerea în factori a polinoamelor $P(x)$ și $P'(x)$, avem:

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) \tag{2}$$

$$P'(x)=n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_{n-1}). \tag{3}$$

Egalînd raportul dintre $P'(x)$ și $P(x)$ din (3) respectiv (2), cu derivata logaritmică a lui $P(x)$ din (2), avem identitatea:

$$\frac{n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_{n-1})}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)} = \frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\dots+\frac{1}{x-\alpha_n}. \tag{4}$$

Ținînd seamă că această identitate este identitatea descompunerii în fracții simple a membrului său stîng, deducem sistemul de n ecuații:

$$\frac{n(\alpha_k-\beta_1)(\alpha_k-\beta_2)\dots(\alpha_k-\beta_{n-1})}{(\alpha_k-\alpha_1)\dots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\dots(\alpha_k-\alpha_n)} = 1\,; \quad k=1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

cu $n-1$ necunoscute: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$.

Acest sistem poate fi scris sub o formă care să permită a privi drept necunoscute coeficienții derivatei, deoarece la numărătorul fracției din (5) figurează valoarea $P'(\alpha_k)$. Notînd în acest scop, pentru prescurtare:

$$\omega_k=(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\dots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\dots(\alpha_k-\alpha_n) \tag{6}$$

sistemul (5) se va scrie sub forma:

$$1\cdot a_{n-1}+\alpha_k 2a_{n-2}+\dots+\alpha_k^{n-2}(n-1)a_1+n\alpha_k^{n-1}=\omega_k\,; \quad k=1, 2, 3, \dots, n.. \tag{5'}$$

Acest sistem știm că este compatibil determinat, deci vom avea, oricare ar fi numerele α_k; $k=1, 2, \dots, n$, identitatea:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2\dots\alpha_k^{n-2} & n\alpha_k^{n-1}-\omega_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0\,; \quad k=1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

de unde, ținînd seamă de structura ultimei coloane a acestui determinant și notînd determinantul Vandermonde al numerelor α_k; $k=1, 2, \dots, n$ prin simbolul: $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, găsim:

$$n\cdot V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2\dots\alpha_k^{n-2} & \omega_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \tag{8}$$

ceea ce ne arată că un determinant Vandermonde poate fi scris și sub forma:

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) =$$

$$=\frac{1}{n}\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2\dots\alpha_k^{n-2} & (\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\dots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\dots(\alpha_k-\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \tag{8'}$$

Rezolvarea sistemului (5') se va putea face lăsînd la o parte una din ecuațiile sale, la întîmplare. Fie aceasta ultima, această alegere nefiind esențială, în caz contrar procedînd la renumerotarea indicilor numerelor α_k.

Sistemul (5′) se va scrie atunci:

$$1\cdot a_{n-1}+\alpha_k 2a_{n-2}+\alpha_k^2 3a_{n-3}+\ldots+\alpha_k^{n-2}(n-1)\,a_1=\omega_{k-n}-n\alpha_k^{n-1}. \qquad (5'')$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

care rezolvat prin regula lui Krammer, ne va da:

$$ma_{n-m}\cdot V(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n-1})=W_{m-1}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}) \qquad (9)$$
$$m=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

unde W_{m-1} este determinantul obținut din determinantul $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ prin înlocuirea coloanei de ordinul m, prin coloana termenilor liberi:

$$W_{m-1}=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2\ldots\alpha_k^{m-2} & \omega_k-n\alpha_k^{n-1} & \alpha_k^m\ldots\alpha_k^{n-2} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{vmatrix}; \qquad (10)$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

care se mai scrie:

$$W_{m-1}=(-1)^{\sigma}\cdot\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2\ldots\alpha_k^{m-2} & \alpha_k^m\ldots\alpha_k^{n-2} & \omega_k & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{\sigma+1}\cdot n\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2\ldots\alpha_k^{m-1} & \alpha_k^{m+1}\ldots\alpha_k^{n-2} & \alpha_k^{n-1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{vmatrix} \qquad (10')$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

unde $\sigma=m-n-1$.

Introducînd pentru cei doi determinanți din membrul drept al relației (10′) notațiile: $V_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1};\ \omega)$ respectiv $V_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$, relația (9) devine:

$$m\cdot a_{n-m}\cdot V(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)=(-1)^{\sigma}\cdot[V_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1};\ \omega)-$$
$$-n\cdot V_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})]. \qquad (9')$$

După cum se știe însă, avem (vezi [1] p. 277):

$$V_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})=V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})\sum_{i_j\neq i_k=1}^{n-1}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_{n-m}}. \qquad (11)$$

Înlocuind (11) în (9′) și folosind relația lui Viéte pentru coeficientul a_{n-m}, avem valoarea determinantului $V_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1};\ \omega)$ sub forma

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2\ldots\alpha_k^{m-2} & \alpha_k^m\ldots\alpha_k^{n-1} & \omega_k & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{vmatrix}=$$

$$=V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})\cdot\left[n\sum_{i_j\neq i_k=1}^{n-1}\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_{n-m}}-m\sum_{i_j\neq i_k=1}^{n}\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_{m-n}}\right] \qquad (12)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

adică:

$$V_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}; \omega) =$$

$$= V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \left[(n-m) \sum_{i_j \neq i_k = 1}^{n-1} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_{n-m}} - m \cdot \alpha_n \sum_{i_j \neq i_k = 1}^{n} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_{n-m}} \right], \quad (12')$$

identitate valabilă oricare ar fi numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ și $1 \leqslant m \leqslant n-1$.

Exemplu. Alegînd $n=5$; $m=3$, avem conform cu (12'):

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_k & \alpha_k^3 & (\alpha_k-\alpha_1)\ldots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k-\alpha_5) \end{vmatrix} =$$

$$= V(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) \left[2 \sum_{i \neq j = 1}^{4} \alpha_i \alpha_j - 3\alpha_5 (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) \right], \quad (13)$$

$$(k=1, 2, 3, 4)$$

unde rămîne de calculat, prin procedeele cunoscute, valoarea determinantului Vandermonde: $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

Evident, dezvoltarea directă a determinantului (13), deși el e format în cazul n relativ mic, ar cere eforturi mari și mult timp, pe cînd așa, pornind de la relații evidente între rădăcinile unui polinom și ale derivatelor sale, valoarea unui astfel de determinant, s-a putut deduce în cazul cel mai general, obținînd pentru valoarea sa o expresie ușor de reținut.

II. Revenind la problema polinoamelor cu proprietățile amintite mai sus, facem remarca următoare: Dacă un polinom $P(x)$, are aceste proprietăți, ele persistă și la polinomul:

$$Q(z) = P(\alpha_1 + z)$$

unde α_1 este un întreg oarecare, polinom al cărui grafic se obține din al lui $P(x)$ printr-o translație în lungul axei Ox.

Observînd acest lucru, vom reduce determinarea polinoamelor $P(x)$ la aceea a polinoamelor $Q(z)$, mutînd originea axelor de coordonate în punctul α_1, considerat ca rădăcină a polinomului $P^{(n-1)}(x)$, evident $Q^{(n-1)}(z)$ avînd atunci rădăcina $\alpha_{11} = 0$, reducînd în acest fel numărul parametrilor de care depinde problema, cu o unitate.

Se pare că una din cele mai eficace căi de încercare a rezolvării acestei probleme, este în continuare aceea de a exprima coeficienții polinomului $Q(z)$, nu în funcție de rădăcinile sale, prin relațiile lui Viéte, ci prin rădăcinile derivatelor succesive, cîte una de la fiecare și evident una de la polinomul însuși.

Acest lucru se poate face construind derivatele polinomului una din alta prin integrări succesive și evidențiind pentru fiecare derivată și pentru polinom cîte o rădăcină.

Fie: $\alpha_{11}=0$; α_{12}; ...; α_{1n}, cîte o rădăcină respectiv a polinoamelor:

$$Q^{(n-1)}(z);\ Q^{(n-2)}(z);\ \ldots;\ Q'(z);\ Q(z).$$

Deoarece $Q(z)$ are coeficientul director egal cu 1, avem succesiv:

$$Q^{(n)}(z)=n!$$

$$Q^{(n-1)}(z)=n!\,z$$

$$Q^{(n-2)}(z)=\frac{n!}{2!}(z^2-\alpha_{12}^2)$$

a) $$Q^{(n-3)}(z)=\frac{n!}{3!}[(z^3-\alpha_{13}^3)-3\alpha_{12}^2(z-\alpha_{13})]$$

b) $$Q^{(n-3)}(z)=\frac{n!}{3!}(z-\alpha_{13})[z^2+\alpha_{13}z+(\alpha_{13}^2-3\alpha_{12}^2)] \qquad (14)$$

c) $$Q^{(n-3)}(z)=\frac{n!}{3!}[z^3-3\alpha_{12}^2z+(3\alpha_{12}^2\alpha_{13}-\alpha_{13}^3)]$$

$$Q^{(n-4)}(z)=\frac{n!}{4!}(z-\alpha_{14})[z^3+\alpha_{14}z^2+(\alpha_{14}-6\alpha_{12}^2)z+(\alpha_{14}^3-4\alpha_{13}^3+12\alpha_{12}^2\alpha_{13}-6\alpha_{12}^2\alpha_{14})]$$

. . . . . , etc.

Evident pe măsură ce vom continua, expresiile coeficienților devin din ce în ce mai complicate și nu se observă o regulă generală în formarea lor.

Se pot pune aici mai multe probleme, ca de exemplu:

1) Să se construiască toate polinoamele de un grad dat, cu coeficienți întregi, avînd împreună cu toate derivatele diferite de o constantă, cel puțin cîte o rădăcină întreagă.

– Această problemă s-a rezolvat deja mai sus, dacă alegem pentru fiecare derivată $Q^{(n-k)}(z)$, $k=1, 2, \ldots, n$, rădăcina α_{1k} întreagă și evident α_1 întreg.

2) Polinoamele și derivatele lor să aibă fiecare în parte toate rădăcinile întregi.

– Evident, problema are soluție, în cel mai rău caz, o putere a unui binom, adică:

$$Q(z)=z^n, \text{ și deci: } P(x)=(x-\alpha_1)^n, \text{ cu } \alpha_1 \text{ întreg.}$$

3) Proprietatea de a avea rădăcini întregi să se limiteze numai la polinom și prima sa derivată sau un număr de derivate succesive începînd cu $Q'(z)$, etc.

Vom arăta mai departe că în cazurile: $n=2$ și $n=3$, problemele 2) și 3) sînt echivalente, construind efectiv polinoamele $Q(z)$ cu aceste proprietăți.

Cazul: $n=2$. În acest caz, dacă luăm α_{12} și α_1 întregi, avem:

$$Q(z)=(z^2-\alpha_{12}^2)$$

$$Q'(z)=2z$$

cu rădăcinile: $z_{1,2}=\pm\alpha_{1,2}$, respectiv: $z_1'=\alpha_{11}=0$, iar pentru $P(x)$ și $P'(x)$: $x_{1,2}=\alpha_1\pm\alpha_{12}$, respectiv: $x_1'=\alpha_1$, toate întregi.

Cazul: $n=3$. Avem succesiv:

$$Q(z)=(z-\alpha_{13})(z^2+\alpha_{13}z+\alpha_{13}^2-3\alpha_{12}^2)$$

$$Q'(z)=3(z^2-\alpha_{12}^2)$$

$$Q''(z)=6z.$$

Se observă că oricum am alege numerele întregi α_1, α_{12}, α_{13}, cele două derivate ale lui $Q(z)$ și $P(x)$ au toate rădăcinile întregi, pe cînd aceste polinoame au asigurate numai cîte o rădăcină întreagă. Rămîne ca celui de-al doilea factor al lui $Q(z)$ să-i impunem condiția să aibă ambele rădăcini întregi, iar pentru aceasta e necesar și suficient ca:

$$12\alpha_{12}^2-3\alpha_{13}^2=9u^2,$$

adică vom avea de rezolvat ecuația diofantiană:

$$(2\alpha_{12})^2-\alpha_{13}^2=3u^2, \tag{15}$$

care se mai scrie:

$$(2\alpha_{12}-\alpha_{13})(2\alpha_{12}+\alpha_{13})=3u^2.$$

Notînd prin λ cel mai mare divizor comun al celor doi factori din membrul stîng din (15), avem, cu abstracție de semn pentru α_{13}:

$$2\alpha_{12}-\alpha_{13}=\lambda t^2$$

$$2\alpha_{12}+\alpha_{13}=3\lambda t^2, \text{ iar: } u=\lambda st, \text{de unde:}$$

$$\alpha_{12}=\frac{\lambda}{4}(3s^2+t^2)$$

$$\alpha_{13}=\frac{\lambda}{2}(3s^2-t^2) \tag{16}$$

unde λ este un întreg arbitrar, iar s și t sînt numere întregi prime între ele $((s, t)=1)$, luîndu-se ambele impare cînd λ nu e multiplu de 4.

De aici rezultă pentru $Q(z)$, rădăcinile;

$$z_1=\lambda\left[t^2-\frac{3}{4}(s+t)^2\right];\quad z_2=\frac{\lambda}{2}(3s^2-t^2);\quad z_3=\lambda\left[t^2-\frac{3}{4}(s-t)^2\right],$$

iar pentru $Q'(z)$:

$$z_1'=-\frac{\lambda}{4}(3s^2+t^2);\quad z_2'=\frac{\lambda}{4}(3s^2+t^2),$$

iar pentru $Q''(z)$, rădăcina: $z_1''=0$.

Din acestea, după cum știm, prin adăugarea întregului α_1 se obțin toate rădăcinile lui $P(x)$ și ale derivatelor sale.

Se observă că avem o familie de polinoame de gradul 3 ce depinde de patru parametri întregi : α_1, λ, t, s. Toate acestea se pot obține dintr-o familie de polinoame ce depinde de doi astfel de parametri (t și s), printr-o translație a planului variabilelor x și $P(x)$, în lungul axei Ox, urmată de o dilatare a acestui plan în raport cu axa Oy.

Aplicație. Polinomul :

$$P(x)=x^3+3x^2-144x-432,$$

este obținut pentru valorile :

$$\alpha_1=-1\,;\quad \lambda=t=1\,;\quad s=3,$$

iar rădăcinile sale și ale derivatelor sînt :

$$x_1=-12\,;\quad x_2=-3\,;\quad x_3=12,\ x_1'=-8\,;\quad x_2''=6 \text{ și } x_2''=-1.$$

Pentru $n>3$, deși există polinoame cu această proprietate, nu se poate deduce o regulă de calcul a tuturor acestor polinoame de un grad dat, deoarece nu se cunoaște o relație pe care trebuie s-o verifice coeficienții unui polinom de un grad oarecare, cu coeficienți literali presupuși întregi, pentru ca toate rădăcinile sale să fie și ele întregi.

BIBLIOGRAFIE

1. Vera Myller-Lebedev, *Lecții de algebră*. Ed. Acad. R.P.R., 1953.

МНОГОЧЛЕНЫ ИМЕЮЩИЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ КОРНИ ОДНОВРЕМЕННО С ИХ ПРОИЗВОДНЫМИ

(РЕЗЮМЕ)

Рассматривается вопрос определения всех многочленов $P(x)$ данной степени, с целыми коэффициентами, которые вместе с последовательными производными до определенного порядка обладают целыми корнями.

Приводятся случаи $n=2$ и $n=3$, после того как выводятся некоторые алгебраические тождества выражаемые через определители родственные определителям Вандермонда. .....

POLINÔMES AYANT DES RACINES RATIONNELLES TOUT COMME LEUR DÉRIVÉES.

(RÉSUMÉ)

On met le problème de déterminer tous les polinômes $P(x)$ de degré donné, à coefficients entiers, qui admettent avec leur derivées successives, jusqu'à un certain ordre donné, toutes les racines entières.

On détermine effectivement cela pour $n=2$ et $n=3$, aprés avoir déduient, au préalable, quelques identitées algébriques exprimées par les déterminants analogues aux déterminants de Vandermonde.

ÜBER DIE FLEXIBILITÄTSGLEICHUNG

VON

J. TÄUBER

Eine Algebra A über einen Körper K heißt flexibel [2], wenn

$$u\,(vu)=(uv)\,u$$

für alle u, v aus A.

Aus diesem Grunde wird folgende Funktionalgleichung

$$F\,[x,\ F\,(y,\ x)]=F\,[F\,(x,\ y),\ x] \tag{1}$$

als Flexibilitätsgleichung bezeichnet. Das Lösen dieser Gleichung unter bestimmten Bedingungen ist das Thema dieser Arbeit.

I. Um dieses Ziel zu erreichen, verwendet man die Autodistributivitätsgleichungen [3], [4], [5].

$$F\,[x,\ F\,(y,\ z)]=F\,[F\,(x,\ y),\ F\,(x,\ z)] \tag{2}$$

$$F\,[F\,(x,\ y),\ z]=F\,[F\,(x,\ z),\ F\,(y,\ z)] \tag{2'}$$

die unter folgenden Voraussetzungen untersucht wurden:

a) Wir bezeichnen $F\,(x,\ y)=x*y:\Delta\subset R\times R$ und nehmen $x,\ y,\ x*y\in\in[a,\ b]\subset R$ an.

b) $x*y$ sei eine reguläre Verknüpfung, d.h.

$$t*x\neq t*y \quad \text{und} \quad x*t\neq y*t \quad \text{für} \quad x\neq y.$$

c) $F\,(x,\ y)$ ist stetig.

Setzt man in (2) und (2') $y=x$ bzw. $z=y$, so folgt aus b), daß $F\,(x,\ x)=x$, d.h. die Verknüpfung ist idempotent (reflexiv). Daraus ergibt sich, daß unter diesen Voraussetzungen a) und b) die Flexibilitätsgleichung (1) aus den Autodistributivitätsgleichungen (2) und (2') gewonnen werden kann.

II. Wir zeigen nun umgekehrt, wie unter gewissen Umständen, die Flexibilitätsgleichung (1) auf eine der Autodistributivitätsgleichungen z.B. (2) zurückgeführt werden kann.

Wir setzen für $F\,(x,\ y)$ aus (1) die Bedingungen a), b), c) und zusätzlich

d) $F\,(x,\ x)=x$ – Reflexivität (Idempotenz) – voraus.

Es ist bekannt [1] S. 193, daß eine ganz beliebige stetige Funktion $F\,(x, y)$ die die Kürzbarkeitseigenschaft b) besitzt, echt monoton in beiden Verän-

derlichen ist und wenn $F(x, y)$ für ein festes $y=y_0$ bezüglich x wächst, so muß $F(x, y)$ für jedes feste y wachsen und dasselbe gilt natürlich auch bezüglich der anderen Veränderlichen und bezüglich des Abnehmens. Weiter kann sie wegen d) nicht in beiden Veränderlichen abnehmend sein. Sie ist entweder *A.* in beiden Veränderlichen wachsend oder *B.* in einer $(z \cdot B \cdot x)$ wachsend und in der anderen (y) abnehmend.

Wir setzen *A.* voraus. Der Fall B. wird in gleicher Weise behandelt.

Bei festem x, y nehmen wir an, daß $z \in [x, y]$ und definieren durch

$$x * (y * z) = (x * y) * (x * v) \tag{3}$$

eine Funktion $v=\varepsilon(z)$. [ware z.B. bei festem x und z die Bedingung $y \in [x, z]$ so würde man die Funktion $u=\varepsilon(y)$ durch $x * (y * z) = (x * u) * (x * z)$ definieren usw.]

Diese Definition für $\varepsilon(z)$ ist berechtigt, da bei festem x, y

$$\alpha(z) : = x * (y * z) \text{ und } \beta(v) : = (x * y) * (x * v)$$

die Beziehungen $\alpha(x)=\beta(x)$ und $\alpha(y)=\beta(y)$ gelten. Verwendet man (1) und d) so ergibt sich tatsächlich

$$\alpha(x)=x * (y * x)=(x * y) * x=(x * y) * (x * x)=\beta(x)$$

bzw. verwendet man zweimal d) so ergibt sich

$$\alpha(y)=x * (y * y)=x * y=(x * y) * (x * y)=\beta(y).$$

Da aber $\alpha(z)$ und $\beta(v)$ beide stetig sind (c), echt monoton wachsen (*A.*) und die obigen Beziehungen gelten, so folgt, daß es für jedes $z \in [x, y]$ ein und nur ein $v=\varepsilon(z)$ gibt, daß der Gleichung (3) genügt und stetig ist.

Die weiteren Eigenschaften der oben definierten Funktion $\varepsilon(z)$ werden in den folgenden Sätzen zusammengefaßt:

Satz 1. $\varepsilon(x)=x$; $\varepsilon(y)=y$.

Beweis: Zieht man (3) bzw. (1) und d) in Betracht, so ergibt sich

$$x * (y * x)=(x * y) * [x * \varepsilon(x)]$$

$$x * (y * x)=(x * y) * x=(x * y) * (x * x)$$

und aus b) folgt

$$\varepsilon(x)=x.$$

Ähnlich wird $\varepsilon(y)=y$ bewiesen.

Satz 2. $\varepsilon(y * u)=\varepsilon[y * \varepsilon(u)]$ falls $u \in [x, y]$.

Beweis: Aus *A.* ergibt sich, daß $y * u$ intern ist, d.h. $y * u \in [x, y]$, falls $u \in [x, y]$. Tatsächlich ist $x=x * x \leqslant y * x \leqslant y * u \leqslant y * y=y$; hier hat man d) und *A.* angewendet.

Somit hat man (es wird (3) bzw. d) angewendet)

$$(x * y) * [x * \varepsilon(y * u)]=x * [y * (y * u)]=$$

$$=x * [(y * y) * (y * \varepsilon(u))]=x * [y * (y * \varepsilon(u))]=(x * y) * [x * \varepsilon(y * \varepsilon(u))].$$

Die Regularität der Verknüpfung $*$ ergibt nun Satz 2.

Satz 3. Aus $u=v$ folgt $\varepsilon(u)=\varepsilon(v)$ und umgekehrt.
Beweis: Es sei $u=v$. Aus (3) ergibt sich $x*(y*u)=(x*y)*[x*\varepsilon(u)]$ bzw. $x*(y*v)=(x*y)*[x*\varepsilon(v)]$. Da wir aber eine reguläre Operation haben und die linken Seiten laut Hypothese gleich sind, ergibt sich $\varepsilon(u)=\varepsilon(v)$. Folgt man diesem Gedankengang im umgekehrten Sinne so ist Satz 3 bewiesen.

Satz 4. $\varepsilon(z)\equiv z$ falls $z\in[x,y]$.
Beweis: Aus Satz 2 folgt $\varepsilon(y*z)=\varepsilon[y*\varepsilon(z)]$ falls $z\in[x,y]$. Wendet man nun Satz 3 an, so ist $y*z=y*\varepsilon(z)$. Da die Verknüpfung $*$ regulär ist, hat man somit den Beweis für Satz 4 erbracht.

Satz 4 angewendet auf (3) zeigt, daß die Flexibilitätsgleichung (1) unter den Bedingungen a), b), c), d) auf die Autodistributivitätsgleichung (2) zurückgeführt wurde und somit beide dieselben Lösungen haben. Wir können deshalb folgenden Hauptsatz aussprechen:

Hautpsatz: Die allgemeine reelle Lösung der Flexibilitätsgleichung (1) unter den zusätzlichen Bedingungen a), b), c), d) ist das quasiarithmetische Mittel

$$F(x,\ y)=f[(1-q)\,f^{-1}(x)+qf^{-1}(y)],\quad (q\neq 0,1) \tag{4}$$

wobei f eine reelle stetige und echt monotene Funktion bzw. f^{-1} ihre Inverse ist.

Somit wurde für die Charakterisierung der quasilinearen Gewichtsmittel ein neues Bedingungssystem gefunden.

III. Bemerkungen.

1. Wie unmittelbar ersichtlich ist, genügt jede symmetrische (kommutative) Funktion $F(x, y)$ der Gleichung (1).

2. Die Erweiterung auf halboffene und offene Intervalle für a) ist leicht mit dem Grenzübergang zu erreichen.

3. Das Lösen der Gleichung (1) unter schwächeren Bedingungen und auf allgemeineren Strukturen und ihre Verallgemeinerungen wird das Thema einer nächsten Arbeit sein.

LITERATURVERZEICHNIS

1. J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1961.
2. H. Braun, M. Koecher, *Jordan-Algebren.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1966.
3. M. Hosszú, On the Functional Equation of Autodistributivity, Publ. math. Debrecen 3 (1953—1954), 83—86.
4. M. Hosszú, Nichtsymmetrische Mittelwerte (Russ.) Colloquium math. 5 (1957—1958), 32—42.
5. M. Hosszú, Nemszimmetrikus középértékek, M. Tud. Akad. III. Ostály közleményei 7 (1957), 207—218.

К УРАВНЕНИЮ ГИБКОСТИ

(РЕЗЮМЕ)

В работе указывается что общее решение функционального уравнения гибкости (1) у условиях a), b), c) (неразрывности), d) является квазиарифметической функцией (4). Уравнение (1) при вышеуказанных условиях эквивалентно уравнениям распределимости (2) и (2′).

ASUPRA ECUAȚIEI FLEXIBILITĂȚII

(REZUMAT)

În lucrarea de față s-a arătat, că soluția generală a ecuației funcționale a flexibilității (1) în ipotezele a), b), c) (continuitate), d) este funcția cvasiaritmetică (4), arătînd că ecuația (1) în ipotezele de sus este echivalentă cu ecuațiile autodistributivității (2) și (2′).

ASUPRA UNOR INTEGRALE IMPROPRII

DE

GH. TUDOR

I. În lucrarea de față, autorul stabilește două formule cuprinzînd unele integrale improprii care depind de mai mulți parametri, folosind pentru aceasta teorema fundamentală a lui Cauchy pentru domenii simplu conexe. Prin particularizări ale parametrilor, se obțin din cele două formule mai multe integrale improprii, printre care unele clasice, bine cunoscute.

II. Să considerăm funcția de variabilă complexă

$$f(z)=z^{\alpha-1}e^{ig(z)} \tag{1}$$

în care $0<\alpha<1$, α-real, iar $g(z)=P(z)-\varphi(z)$ cu

$$P(z)=\sum_1^n a_k z^k, \quad \varphi(z)=\sum_1^m \lambda_\nu z^{-\nu}, \quad a_k\geqslant 0, \quad k=1,\ldots n,$$

$$\sum_1^n a_k\neq 0, \quad \lambda_\nu\geqslant 0, \quad \nu=1,\ldots,m.$$

Aplicăm teorema fundamentală a lui Cauchy pentru domeniul din figura alăturată, în care

$$0\leqslant\omega\leqslant\frac{\pi}{M},$$

$$M=\max(m,n)$$

și obținem

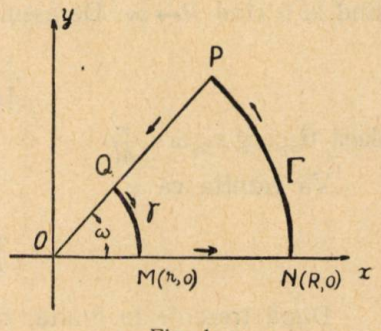

Fig. 1

$$\oint_c f(z)\,dz=0 \tag{2}$$

care se mai poate scrie

$$\int_r^R f(x)\,dx+\int_\Gamma f(z)\,dz+\int_R^r f(\rho e^{i\omega})\,e^{i\omega}d\rho+\int_\gamma f(z)dz=0. \tag{3}$$

Facem în relaţia (3) $r\to 0$ şi $R\to\infty$. Să observăm că

$$|e^{ig(z)}|=e^{-\sum_1^n a_k\rho^k\sin k\theta-\sum_1^m \lambda_\nu\rho^{-\nu}\sin\nu\theta}\leqslant 1, \tag{4}$$

dacă $\leqslant 0\ \arg z\leqslant\omega<\frac{\pi}{M}$.

Prin urmare, $\lim\limits_{z\to 0}[zf(z)]=0$ deoarece $|zf(z)|<\rho^\alpha$, ceea ce atrage după sine

$$\lim_{r\to 0}\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

Să considerăm acum egalitatea:

$$ina_n f(z)=\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{z^{n-1}}\right]+(n-\alpha)\,z^{-n}f(z)-$$

$$-if(z)\sum_{k=1}^{n-1}ka_k z^{k-n}-if(z)\sum_{\nu=1}^{m}\nu\lambda_\nu z^{-n-\nu}. \tag{5}$$

Integrăm această relaţie pe Γ şi avem:

$$ina_n\int_\Gamma f(z)\,dz=\frac{f(z)}{z^{n-1}}\Big|_R^{Re^{i\omega}}+(n-\alpha)\int_\Gamma z^{-n}f(z)\,dz-$$

$$-i\sum_{k=1}^{n-1}ka_k\int_\Gamma z^{k-n}f(z)\,dz-i\sum_{\nu=1}^{m}\nu\lambda_\nu\int_\Gamma f(z)\,z^{-n-\nu}\,dz. \tag{6}$$

Facem în relaţia (6), $R\to\infty$. Pe baza inegalităţii (4) utilizînd o lemă cunoscută (v. [4]), se arată cu uşurinţă că integralele din membrul drept al egalităţii (6), tind la 0 cînd $R\to\infty$. De asemeni, termenul integrat tinde la 0, deoarece

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n-1}}\right|\leqslant\rho^{\alpha-n}=\frac{1}{\rho^{n-\alpha}}$$

dacă $0\leqslant\arg z\leqslant\omega<\frac{\pi}{M}$.

Va rezulta că şi

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,dz=0.$$

După trecerile la limită, relaţia (3) devine:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=e^{i\omega}\int_0^\infty f(xe^{i\omega})\,dx \tag{7}$$

(Am pus $\rho=x$).

Egalînd părțile reale și imaginare în (7), obținem formulele generale

$$\int_0^\infty x^{a-1}\cos g(x)\,dx=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-S(x)-S_1(x)}\cos(\alpha\omega+C(x)-C_1(x))\,dx \tag{8}$$

$$\int_0^\infty x^{a-1}\sin g(x)\,dx=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-S(x)-S_1(x)}\sin(\alpha\omega+C(x)-C_1(x))\,dx \tag{9}$$

în care am notat

$$S(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k\sin k\omega,\quad S_1(x)=\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\nu x^{-\nu}\sin\nu\omega$$
$$C(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k\cos k\omega,\quad C_1(x)=\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\nu x^{-\nu}\cos\nu\omega. \tag{10}$$

Vom arăta acum cîteva cazuri particulare cunoscute, ce se obțin din formulele (8) și (9).

III. Luăm $P(x)=x$, $\varphi(x)=0$, $\omega=\frac{\pi}{2}$ și făcînd schimbarea de variabilă $x=t^p$, $p=1/\alpha>1$, formulele (8) și (9) ne dau:

$$\int_0^\infty\cos t^p\,dt=\cos\frac{\pi}{2p}\int_0^\infty e^{-t^p}dt=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p} \tag{11}$$

$$\int_0^\infty\sin t^p\,dt=\sin\frac{\pi}{2p}\int_0^\infty e^{-t^p}\,dt=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p} \tag{12}$$

din care, pentru $p=2$, se obțin integralele clasice

$$\int_0^\infty\cos t^2\,dt=\int_0^\infty\sin t^2\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{13}$$

IV. Luăm $P(x)=x$, $\varphi(x)=x$, $\omega=\frac{\pi}{2}$ și făcînd schimbarea de variabilă $x=t^p$, $p=1/\alpha$ în formulele (8), (9) obținem:

$$\int_0^\infty\cos\left(x^p-\frac{1}{x^p}\right)dx=\cos\frac{\pi}{2p}\int_0^\infty e^{-x^p-\frac{1}{x^p}}dx \tag{14}$$

$$\int_0^\infty\sin\left(x^p-\frac{1}{x^p}\right)dx=\sin\frac{\pi}{2p}\int_0^\infty e^{-x^p-\frac{1}{x^p}}dx. \tag{15}$$

Pentru $p=2$, folosind rezultatul cunoscut

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{1}{x^2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2} \tag{16}$$

din (14) și (15) se obține

$$\int_0^\infty\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_0^\infty\sin\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-2}. \tag{17}$$

V. Fie $P(x)=x$, $\varphi(x)=0$, $\alpha=\frac{1}{2}$ și cu schimbarea de variabilă $x=t^2$, avem

$$\int_0^\infty \cos t^2\,dt = \int_0^\infty e^{-t^2\sin\omega}\cdot\cos\left(\frac{\omega}{2}+t^2\cos\omega\right)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{18}$$

$$\int_0^\infty \sin t^2 dt = \int_0^\infty e^{-t^2\sin\omega}\cdot\sin\left(\frac{\omega}{2}+t^2\cos\omega\right)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{19}$$

din care obținem cu ușurință

$$\int_0^\infty e^{-x^2\sin\omega}\cdot\cos(x^2\cos\omega)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}+\sin\frac{\omega}{2}\right) \tag{20}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2\sin\omega}\cdot\sin(x^2\cos\omega)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}-\sin\frac{\omega}{2}\right). \tag{21}$$

Menționăm pentru a încheia că, din formulele (8) și (9) se pot obține și alte cazuri particulare interesante, pe care însă, din motive de spațiu, nu le vom enumera aici.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Dimitrovski, Application du calcul des résidus aux certaines intégrales définies, (serbo-cr.) — Matematička biblioteka — 22, an. 1926, pag. 61—70.
2. W. Gröbner und N. Hofreiter, *Integraltafel*, II — *Bestimmte Integrale*, Wien, 1958.
3. F. Guglielmino, Calcolo di integrali singulari mediante il teorema dei residui. Le Matematiche, anno 1961 t. VI, p. 97 Catania.
4. I. Gh. Sabac, *Matematici speciale*, vol. II, 1965, București, p. 190—191.

О НЕКОТОРЫХ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛАХ

(РЕЗЮМЕ)

В заметке автор дает два отношения между некоторыми обобщенными интегралами содержащими несколько параметров.

Из этих отношений получается, при частных значениях параметров, ряд обобщенных интегралов, между Которыми и классические хорошо известные интегралы.

SUR CERTAINES INTÉGRALES IMPROPRES

(RÉSUMÉ)

Dans le prèsent travail l'auteur établie deux relation entre certaines intégrales impropres contenantes plusieurs paramètres.

De ces relations on obtient pour des valeurs particulières données aux paramètres plusieurs intégrales impropres, parmi lesquelles aussi des intégrale classiques bien connues.

LUNGIMEA BUCLEI DE DISLOCAȚIE

DE

I. I. NICOLAESCU

Se dă o nouă expresie pentru lungimea buclei de dislocație, care joacă un rol important în studiul frecării interne de dislocație.

În ultima vreme, în studiul corpului solid se aplică tot mai frecvent și cu deosebit succes, metodele acustice. Acest fapt își găsește explicația în sensibilitatea lor mare la studiul defectelor liniare (dislocații) și de suprafață, precum și datorită faptului că permit să se măsoare parametrii difuziei chiar și la temperaturi joase, unde alte metode nu pot fi aplicate [1], [2], [3], [4].

Aceste metode se bazează pe măsurarea frecării interne sau a vitezei de propagare a undelor elastice și permit să se efectueze măsurători într-o gamă largă de frecvențe și într-un interval mare de temperatură la diferite amplitudini de deformații.

Metodele acustice se aplică cu deosebit succes nu numai la studiul corpurilor solide dar și la studiul lichidelor și a gazelor.

Pot fi delimitate două direcții principale de aplicare a undelor elastice (infrasunete, sunete, ultrasunete și hipersunete) în tehnică și în știință.

Prima este legată de folosirea undelor elastice ca agent de provocare a unor procese fizico-chimice sau biologice, iar cea de a doua de folosire a lor în studiul substanței. Aplicarea lor la studiul corpului solid se bazează fie pe interacțiunile dintre undele elastice cu defectele cristalografice ale rețelei (defectele de structură), fie pe interacțiunile la nivel cuantic (fonon-fonon, fonon-electron, fonon-spin nuclear, etc).

Experiențele au arătat că energia mecanică de asociație a unui corp solid, fie el chiar izolat de exterior, se transformă cu timpul în căldură. Amortizarea oscilațiilor este determinată de comportarea neelastică a corpului solid (abaterea de la legea lui Hooke). Frecarea internă, care caracterizează amortizarea oscilațiilor se definește ca fiind mărimea Q^{-1} (inversul factorului mecanic de calitate al sistemului) dată de relația:

$$Q^{-1} = \frac{\Delta W}{W} \tag{1}$$

unde W este energia totală de oscilație, iar ΔW energia pierdută de sistem după o perioadă.

Cele mai cunoscute cauze ale frecării interne sînt: efectul termoelastic, datorat propagării undelor, alunecarea vîscoasă la temperaturi ridicate a granulelor policristalelor, difuzia bazată pe redistribuția atomilor de penetrație (efectul Snoek), relaxația electronică, prezența dislocațiilor etc. În corpurile feromagnetice și seignetoelectrice pot fi și alte cauze [3], [4], [5].

Unele cristale foarte pure (1—200 p.p.m.) ca de ex. aluminiu, cupru, plumb, argint, aur, cristale ionice supuse unor tratamente termomecanice sau iradierii cu raze X, cu neutroni, electroni protoni își modifică sensibil frecarea internă de dislocație.

W. Köster [6] a observat că frecarea internă a unui corp deformat plastic se micșorează în timp, imediat după înlăturarea sarcinii mecanice. Această scădere a frecării interne a fost explicată pe baza migrației pe dislocații a defectelor punctiforme. Acest fenomen se mai numește revenire, îmbătrînire sau efect Köster și poate fi observat și la eșantioanele călite sau la cele care se iradiază.

Cum am arătat mai sus, una din sursele importante ale frecării interne sînt dislocațiile. Teoria absorbției ultrasonore de dislocație a fost dată de Granato și Lucke [7]. Ei au luat în considerare interacțiunea dintre unda elastică și dislocație, considerată ca o coardă elastică de lungime l și au găsit în domeniul kHz pentru frecarea internă (care este proporțională cu absorbția ultrasonoră) și respectiv pentru defectul de modul elastic următoarele expresii:

$$\Delta = K_1 \Lambda l^4 \tag{2}$$

$$\frac{\Delta G}{G} = K_2 \Lambda l^2 \tag{3}$$

unde $\Delta = \pi Q^{-1}$ este decrementul logaritmic, Λ densitatea de dislocație, K_1 și K_2 două constante pentru o frecvență dată, iar G modulul elastic.

În scopul găsirii expresiei analitice a dependenței lungimii buclei de dislocație de timp, în cazul eșantioanelor călite am luat în considerare migrarea defectelor punctiforme pe dislocații. S-au neglijat efectele anihilării reciproce a defectelor sau formarea de complexe de defecte (bivacanțe, trivacanțe și altele). Cu alte cuvinte am presupus că în eșantion se găsesc distribuite uniform dislocații și defecte punctiforme (vacanțe). Teoria și rezultatele experiențelor arată că în materialele pure și aliajele cu structura soluției solide de substituție, trebuie să predomine difuzia bazată pe mecanismul vacanței [8].

În cazul călirii, concentrația defectelor scade cu timpul după o lege de forma [8], [9], [10]:

$$n = n_0 \exp(-\beta t^m) \tag{4}$$

unde $m = 2/3$; $1/2$ [9], iar n_0 este numărul defectelor pe cm³ la $t = 0$ (la sfîrșitul călirii).

Datorită difuziei din cele n_0 defecte punctiforme, un număr $n_0 - n$ de defecte vor migra pe dislocații și le vor bloca, ceea ce va duce la micșorarea frecării interne de dislocație.

Dacă se notează cu n' raportul $\frac{n_0-n}{n_0}$ se obține următoarea expresie

$$1-n'=\exp(-\beta t^m). \tag{5}$$

Întrucît difuzia defectelor punctiforme, duce la micșorarea frecării interne, (5) se poate scrie și sub forma:

$$\exp(-\beta t^m)=\frac{\Delta}{\Delta_0} \tag{6}$$

unde Δ_0 este decrementul logaritmic la $t=0$, deci în momentul cînd începe revenirea. Pentru a găsi expresia lungimii buclei de dislocație vom ține seama de expresia lui Δ din (2) și de faptul că densitatea de dislocație în procesul revenirii nu variază [11]. Notînd cu $\beta=4\beta_0$ se obține pentru l din (2) și (6) expresia:

$$l=l_0\exp(-\beta_0 t^m) \tag{7}$$

care a fost propusă pentru prima dată în lucrarea [12].

J. Friedel [9] a arătat că β depinde de prelucrările termomecanice de natura materialului, de dimensiunea eșantionului și de alți factori.

S. Harper [13] plecînd de la alte considerente și anume că viteza de „precipitare" pe dislocații se micșorează cu timpul datorită defectelor punctiforme sedimentate pe dislocații, a găsit pentru Δ o expresie asemănătoare lui (5). Din compararea lui (5) cu formula dedusă de el rezultă (pentru $m=2/3$) că are forma:

$$\beta=3\Lambda\left(\frac{A\cdot D}{KT}\right)^{2/3} \tag{8}$$

unde A pentru metale are o valoare de $5\cdot10^{-20}$ cm^2·dyn și este dat de formula interacțiunii dislocației pozitive cu defectele punctiforme [14], D este coeficientul de difuzie la temperatura absolută T, iar K constanta lui Boltzmann.

După cum se vede din formula (8) putem să determinăm, dacă se cunoaște Λ coeficientul de difuzie D, pe baza efectului Köster. Prin înlocuirea lui (7) în (2) și notînd cu Δ_τ valoarea lui pentru $t=2$ sau 3 ore de la începutul procesului, cînd revenirea decurge foarte încet (Δ_τ poate lua chiar valoarea pe care a avut-o eșantionul înainte de a fi călit, dacă temperatura de călire n-a fost prea mare) se va obține formula:

$$\ln\frac{\Delta_0-\Delta_\tau}{\Delta-\Delta_\tau}=\beta t^m. \tag{9}$$

Introducerea lui Δ_τ permite luarea în considerare numai a frecării interne de dislocație, determinată de procesul respectiv la care este pus eșantionul.

Am observat experimental că expresia nouă se aplică foarte bine în măsurătorile efectului Köster la aluminiu supus unei tensiuni mecanice $\sigma=\frac{30\text{ kg}}{\text{cm}^2}$.

Deobicei tensiunea (comprimare) se aplică pe mijlocul eșantionului pentru a nu-i deforma suprafețele de reflexie, paralelismul lor.

În acest caz coeficientul de absorbție se determină în modul următor: fie l_2 lungimea porțiunii deformate (părții centrale) iar l_1 lungimea fiecărei părți nedeformate. Întrucît coeficienții de absorbție sînt aditivi se poate scrie:

$$A = A_0 \exp -\alpha (2l_1 + l_2)] \tag{10}$$

înainte de deformație și

$$A' = A_0 \exp [-2l_1\alpha - l_2\alpha'] \tag{11}$$

după deformație, unde A și A', α și α' sînt amplitudinile, respectiv coeficienții de absorbție înainte și după deformația eșantionului, iar l_2+2l_1 este tocmai lungimea totală a lui.

Din (10) și (11) se vede că:

$$\ln \frac{A}{A'} = (\alpha' - \alpha)\, l_2. \tag{12}$$

În cazul metodei impulsului ecou cînd aceeași plăcuță de cuarț joacă atît rolul de emițător cît și de receptor, (12) devine:

$$\alpha' - \alpha = \frac{1}{2nl_2} \ln \frac{A}{A'} \tag{12'}$$

în care n (numărul reflexelor impulsului ultrasonor în eșantion pe fața opusă plăcii de cuarț), corespunde amplitudinii A și A' și poate fi determinat pe oscilograful catodic.

În procesul revenirii se măsoară înălțimea lui A' (creșterea lui pentru diferite timpuri).

Probabil că formula (9), poate fi aplicată cu succes și pentru eșantioanele care se iradiază.

Metoda frecării interne de dislocație permite punerea în evidență a unor concentrații de defecte punctiforme foarte mici (aprox. 10^{-14}) în comparație cu metoda rezistenței electrice sau a parametrului rețelei care au limita inferioară a concentrației mult mai mare 10^{-9} și respectiv 10^{-5}. Sensibilitatea mare a metodei frecării interne o face avantajoasă la studiul interacțiunilor dintre dislocație și defectele punctiforme obținute după căliri rapide, după deformația plastică sau la iradieri.

BIBLIOGRAFIE

1. Physical Acoustics, ed by W. P. Mason, Ac. Press, 1964—1966.
2. L. G. Merculov, *Ultrazvucovîe metodî issledovania dislocații;* Moscva, 1963.
3. A. S. Novick, *Progress in Metal Physics*, vol. 4, 1953.
4. D. H. Nibbett, J. Wilks, Advances in Physics, *9*, 33, 1960.
5. A. Cișman, B. F. Rothenstein, A. Policec, *Fenomene fizice în metale feromagnetice solicitate*, Buc., 1968.
6. W. Köster, Z. Metallkunde, *32*, 282, 1940.
7. A. Granato, K. Lucke, Appl. Phys., *27*, 583, 1956.

8. P. G. Schewon, *Diffusion in solids* — N. Y., Toronto, Londra, 1963.
9. J. Friedel, *Les dislocations*, Paris, 1956.
10. M. Wintenberger, Acta Met., *7*, 549, 1956.
11. A. Granato, A. Hikata, K. Lucke, Acta Met., *6*, 470, 1958.
12. I. I. Nicolaescu, Ann. şt. Univ. Iaşi, *15*, II b, 169, 1969.
13. S. Harpers, Phys. Rev. *83*, 4, 709, 1951.
14. A. H. Cottrell, *Dislocations and Plastic Flow in Crystals*, 1953 (în l. rusă).

ДЛИНА ПЕТЛИ ДИСЛОКАЦИИ.

(РЕЗЮМЕ)

Предплагается новое выражение для длины петли дислокации, которая играет важную роль в изучении дислокационного внутреннего трения.

LA LONGEUR DE LA BOUCLE DE DISLOCATION

(RÉSUMÉ)

On propose une expression (exponentielle) pour la diminuation de la boucle de dislocation dans les processus thermomecaniques. On indique la posibilité d'utilise la restauration du frottement interne pour la détermination des paramètres de diffusion des lacunes.

THE EXTENSION OF THE CIRCLE THEOREM TO THE CAUCHY INTEGRAL REPRESENTATION OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS *

DE

O. POPA

In what follows we intend to extend the circle theorem, enunciated by Milne-Thomson [1] for functions of a complex variable defined in the whole plane, to the Cauchy integral representations of holomorphic functions.

The results obtained are of an outstanding interest in the study of the plane potential motion, where both the complex potential of the motion and the complex velocity are functions which admit a Cauchy integral representation on the domain limited by the boundaries of the motion. Furthermore, these results can be successfully employed in constructing some functions for the conformal mapping of the domain external to a circle of radius R on the domain external to an isolated contour or on the domain external to a system of periodical obstacles.

Let K be the contour of the circle $|z|=R$ in the complex plane z. The set of points belonging to K

$$K=\{\zeta / |\zeta|=R\}, \tag{1}$$

divides the complex plane z into two domains:

$$D^{\pm}=\{z/|z|\lesseqgtr R\}; \tag{2}$$

where, distinct notations have been used for the points belonging to the contour K and to the domains $D^{\pm}: \zeta \in K$ and $z \in D^{\pm}$, [2].

We denote by D_0^- the domain defined by

$$D_0^-=D^- - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad |a_k|>R, \quad (k=1, 2, \ldots, n); \tag{3}$$

The point at the infinity can be considered to belong among the points $z=a_k$.

---

* This papare was presented at the Colloquium for Applying the Theory of Complex Functions to the Continuum Mechanics, held at Sinaia, October 6—9, 1966, organized by the Society of Mathematical Sciences of the Socialist Republic of Romania.

Let also $F(z)$ be a holomorphic function on D_0^-, with given singularities on the set $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, and continuous on the closed domain $D_0^- \cup K$, i.e.

$$\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} = 0, \quad z \in D_0^-, \tag{4}$$

$$\lim_{z \in D_0^- \to \zeta \in K} F(z) = F(\zeta). \tag{5}$$

Taking into consideration the given singularities of the function $F(z)$ and the conditions (4) and (5), it follows that $F(z)$ admits the following integral representation on D_0^-, [2]:

$$F(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta; \quad z \in D_0^-, \ \zeta \in K; \tag{6}$$

where $f(z)$ is a function defined in the whole plane and uniquely determined by the given singularities of the function $F(z)$. $f(z)$ is holomorphic on the domain complementary to the set $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ and it is equal to a complex constant F_∞ if $n=0$, i.e.

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0, \ z \in D_0^- \cup K \cup D^+, \tag{7}$$

$$f(z) = F_\infty \quad \text{if} \quad D_0^- = D^-. \tag{8}$$

The limit on the contour of the integral representation (6) leads to the following integral equation, [2]:

$$F(\zeta_0) = 2f(\zeta_0) - \frac{1}{\pi i} \int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta; \quad \zeta, \zeta_0 \in K; \tag{9}$$

and for $z \in D^+$, if the limit (5) takes place, the following integral condition results from (6), [2]:

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0; \quad z \in D^+, \ \zeta \in K; \tag{10}$$

which is equivalent to the condition

$$F(z \in D^+) = 0. \tag{11}$$

Grouping (6), (9), and (10) we obtain the general expression of the Cauchy integral representation of the function $F(z)$ on D_0^-

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} F(z), & z \in D_0^-; \\ \frac{1}{2} F(\zeta_0), & z \in D_0^- \to \zeta_0 \in K; \\ 0, & z \in D^+. \end{cases} \tag{12}$$

In what follows we shall denote by $F^+(z)$ the analytical continuation of the function $F(z)$ in D^+, defined by

$$F^+(z)=\overline{F\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}=\bar{F}\left(\frac{R^2}{z}\right). \tag{13}$$

hence, D_0^+, the domain of holomorphy of the function $F^+(z)$ is

$$D_0^+=D^+-\left\{\frac{R^2}{\bar{a}_1}, \frac{R^2}{\bar{a}_2}, \ldots, \frac{R^2}{\bar{a}_n}\right\}. \tag{14}$$

Observing what has been enunciated above, the following theorems can be proved:

Theorem I. If the function $F(z)$ admits a Cauchy integral representation (12) on the domain D_0^-, and has given singularities on the finite set of discrete points $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ and if it satisfies, on K, the condition

$$Im\{F(\zeta)\,d\zeta\}=0, \quad \zeta\in K; \tag{15}$$

then, $F^+(z)$, the analytical continuation of the function $F(z)$ in D^+, defined by (13), will have the following integral representation on D_0^+

$$\bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right)-\frac{z^2}{R^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{z}{R^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_K F(\zeta)\,d\zeta=\begin{cases}F^+(z), & z\in D_0^+;\\ \frac{1}{2}F^+(\zeta_0), & z\in D_0^+\to\zeta_0\in K;\\ 0, & z\in D^-;\end{cases} \tag{16}$$

and the function $F(z)$, defined in the whole plane, will have the following expression

$$F(z)=f(z)-\frac{R^2}{z^2}\bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right)+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_K F(\zeta)\,d\zeta; \quad z\in D_0^{\pm}, \ \zeta\in K; \tag{17}$$

the limit on the contour of this expression being the exact and explicit solution of the integral equation (9) or (12.2).

Theorem II. If the function $F(z)$ admits a Cauchy integral representation (12) on the domain D_0^- and has given singularities on the finite set of discrete points $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ and if it satisfies, on K, the condition

$$Im\{F(\zeta)\}=0, \quad \zeta\in K; \tag{18}$$

then, $F^+(z)$, the analytical continuation of the function $F(z)$ in D^+, defined by (13), will have the following integral representation on D_0^+

$$\bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(0)=\begin{cases}F^+(z), & z\in D_0^+;\\ \frac{1}{2}F^+(\zeta_0), & z\in D_0^+\to\zeta_0\in K;\\ 0, & z\in D^-;\end{cases} \tag{19}$$

and the function $F(z)$, defined in the whole plane, will have the following expression

$$F(z)=f(z)+\bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right)-f(0), \quad z\in D_0^{\pm}; \tag{20}$$

the limit on the contour of this expression being the exact and explicit solution of the integral equation (9) or (12.2).

In order to prove the two theorems we start from the definition of the analytical continuation $F^+(z)$ given by (13); applying it to the integral representation (12), we obtain

$$\bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\overline{F(\zeta)\,d\zeta}}{\bar{\zeta}-\frac{R^2}{z}}=\begin{cases} F^+(z), & z\in D_0^+; \\ \frac{1}{2}F^+(\zeta_0), & z\in D_0^+\to\zeta_0\in K; \\ 0, & z\in D^-. \end{cases} \tag{21}$$

By virtue of condition (15) it follows that

$$\overline{F(\zeta)\,d\zeta}=F(\zeta)\,d\zeta, \tag{22}$$

and as

$$\bar{\zeta}=\frac{R^2}{\zeta} \tag{23}$$

we have

$$\frac{\overline{F(\zeta)\,d\zeta}}{\bar{\zeta}-\frac{R^2}{z}}=\frac{1}{R^2}\cdot\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{z}}=-\left(\frac{z}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}\cdot\frac{1}{\zeta-z}\right)F(\zeta)\,d\zeta, \tag{24}$$

which being replaced in (21) leads to (16).

In the same way, taking into account the condition (18), we have

$$\overline{F(\zeta)}=F(\zeta), \tag{25}$$

and observing (23), instead of the equality (24), we have

$$\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\bar{\zeta}-\frac{R^2}{Z}}=F(\zeta)\cdot\frac{d\left(\frac{R^2}{\zeta}\right)}{\frac{R^2}{z}-\frac{R^2}{z}}=\left(-\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta-z}\right)F(\zeta)\,d\zeta. \tag{26}$$

On the other hand, in accordance with (10) or (12.3), it follows that for $z=0$ (point belonging to D^+), we have

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta=f(0), \tag{27}$$

because, in accordance with (10), $F(0)=0$.

Replacing (26) in (21) and taking into account (27), we obtain (19).

Thus the analytical continuations (16) and (19) have been proved.

In order to obtain the expression of the functions $F(z)$ defined in the whole plane, (17) and (20), we start from the integral representation (12) of the function $F(z)$ and from the integral representations of the analytical continuations, (16) and (19), considering them in each case either for $z \in D_0^-$ or for $z \in D_0^+$; irrespective of the choice made, the same result is obtained.

Thus, in order to prove (17), we notice that for $z \in D_0^-$ we have the following integral formulae simultaneously satisfied

$$F(z) = \bar{f}(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{28}$$

$$0 = \frac{R^2}{z^2}\bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_K F(\zeta)\, d\zeta; \tag{29}$$

where the last formula has been divided by z^2/R^2.

By substracting (29) from (28), (17) is obtained.

In order to prove the expression (20), we notice that for $z \in D_0^-$ we have the following integral formulae simutaneously satisfied

$$F(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{30}$$

$$0 = \bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(0). \tag{31}$$

By adding (30) to (29), (20) is obtained.

Selecting instead of the domain D_0^-, the domain D_0^+, the same results are obtained. Thus the expressions (17) and (20) have been proved.

Examples. We shall illustrate the application of the enunciated theorems by solving the following two problems:

1) Let us determine the complex velocity $W(z)$ in the presence of the circle K, $|z| = R$, which is subjected to a stream of asymptotic velocity $W_\infty =$ = complex constant.

The complex velocity $W(z)$ has the following properties:

$$\frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} = 0, \quad z \in D^- \cup K; \tag{32}$$

$$\lim_{z \in D^- \to \zeta \in K} W(z) = W(\zeta), \tag{33}$$

$$\lim_{z \to \infty} W(z) = W_\infty, \tag{34}$$

$$Im\{W(\zeta)\, d\zeta\} = 0; \tag{35}$$

the last condition is obvious, the contour K being streamline. Indeed, if $F(z) = \Phi + i\Psi$ is the complex potential of the motion, where Φ is the velocity potential and Ψ the stream function, then the condition $\Psi = \text{const.}$ will be ful-

filled on the contour K, the contour K being stream line. But according to definition

$$W(z)=\frac{dF(z)}{dz} \tag{36}$$

hence it follows that on the contour K we have

$$W(\zeta)\,d\zeta=dF(\zeta)=d\Phi+id\Psi=d\Phi, \tag{37}$$

which leads to the boundary condition (35).

In accordance with the enunciated properties it follows that the complex velocity $W(z)$ admits a Cauchy integral representation on D^-. Thus, in accordance with (12)

$$W_\infty-\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{W(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases} W(z), & z\in D^-;\\ \frac{1}{2}W(\zeta_0), & z\in D^-\to\zeta_0\in K;\\ 0, & z\in D^+. \end{cases} \tag{38}$$

Taking into account the integral representation (38) and the boundary condition (35), it follows that the solution of the problem is obtained by applying theorem I, where we shall consider $f(z)=W_\infty$, by comparing the representations (38) and (12). Thus we obtain the classical expression of the complex velocity in the presence of the circle $|z|=R$, defined in the whole plane

$$W(z)=W_\infty-\overline{W}_\infty\frac{R^2}{z^2}-\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}, \tag{39}$$

where

$$\Gamma=-\int_K W(\zeta)\,d\zeta, \tag{40}$$

is, by definition, the circulation of velocity.

2) Let us determine the Joukowski transformation $z_L=z_L(z)$, which conformally maps the domain D^- external to the circle K, $|z|=R$, on the domaine D_L^- external to a slit L defined by

$$L=\left\{\zeta_L=\xi_L+i\eta_L/-\frac{l}{2}\leqslant\xi_L\leqslant+\frac{l}{2};\quad\eta_L=0\right\}. \tag{41}$$

Consequently the function $z_L=z_L(z)$ establishes the following correspondences

$$z_L\in D_L^- \quad\text{for}\quad z\in D^-, \tag{42}$$

$$\zeta_L\in L \quad\text{for}\quad \zeta\in K; \tag{43}$$

to which we add the condition of superposing the two complex planes in the point at infinity, condition expressed by the following limit

$$\lim_{z\to\infty}\frac{dz_L}{dz}=1. \tag{44}$$

Thus, the function of conformal mapping $z_L=z_L(z)$ has the following properties

$$\frac{\partial z_L(z)}{\partial \bar{z}}=0, \quad z\in D^-, \tag{45}$$

$$\lim_{z\in D^-\to\zeta\in K} z_L(z)=\zeta_L(\zeta), \tag{46}$$

$$\{z_L(z)\}_\infty=z, \tag{47}$$

$$Im\{\zeta(\zeta_L)\}=0; \tag{48}$$

where property (47) derives from (44), and property (44) from (43) and (41).

By virtue of the enunciated properties, the function $z_L=z_L(z)$ admits the following Cauchy integral representation on D^-

$$z-\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\zeta_L(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases} z_L(z), & z\in D^- \\ \frac{1}{2}\zeta_L(\zeta_0), & z\in D^-\to\zeta_0\in K; \\ 0, & z\in D^+. \end{cases} \tag{49}$$

Taking into account the integral representation (49) and the condition on the boundary (48), it follows that the solution of the problem is obtained by applying theorem II, where, by comparing the representations (49) and (12) we shall consider $f(z)=z$. Thus, since $f(0)=0$, it follows that

$$z_L(z)=z+\frac{R^2}{z}, \quad R=\frac{l}{4}. \tag{50}$$

The obtained solution (50) represents the classical expression of the Joukowski transformation.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. M. Milne-Thomson, Proc. Camb. Phil. Soc., 1940. t. 36.
2. N. I. Muschelischwili, *Singuläre Integralgleichungen.* Berlin, Akademie-Verlag. 1965.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КРУГА НА ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОШИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

(РЕЗЮМЕ)

Доказывается возможность распространения теоремы круга-сформулированной Милне-Томсоном для функций комплексной переменной определенной на всей плоскости — на интегральное изображение Коши голоморфных функций во внешней области круга $|z|=R$, за исключе-

нием конечного множества дискретных точек в которых функция обладает данными особыми точками.

Далее формулируются две теоремы которые, в случае данного интегрального изображения Коши, позволяют графически изобразить функцию определенную во всей плоскости.

Пределом этой функции на окружности является точное и явное решение интегрального уравнения полученного изображения интеграла.

EXTINDEREA TEOREMEI CERCULUI LA REPREZENTAREA INTEGRALĂ CAUCHY A FUNCȚIILOR OLOMORFE

(REZUMAT)

Se demonstrează posibilitatea extinderii teoremei cercului – enunțată de Milne-Thomson pentru funcții de o variabilă complexă definite în tot planul – la reprezentarea integrală Cauchy a funcțiilor olomorfe pe domeniul exterior cercului $|z|=R$, mai puțin o mulțime finită de puncte discrete în care funcția are singularități date.

Se enunță două teoreme care, în cazul unei reprezentări integrale Cauchy date, permit construirea funcției definite în tot planul ; limita pe conturul cercului a acestei funcții reprezentînd soluția exactă și explicită a ecuației integrale obținută din reprezentarea integrală.

MIȘCĂRI PERIODICE ALE UNEI MASE LIBERE PE UN LIMITATOR ELASTIC CE ARE O MIȘCARE PERIODICĂ

GH. SILAȘ, L. BRINDEU, V. BACRIA

INTRODUCERE

1. Metodele de studiu ale mișcărilor periodice și stabilității lor pentru mecanismele vibropercutante cu un grad de libertate se pot folosi și pentru studiul mișcărilor unor sisteme vibrante. În acest fel vom studia în prezenta lucrare mișcarea pe verticală a unei mase simplu rezemată pe una din extremitățile unui limitator elastic, presupunînd că cealaltă extremitate execută o mișcare periodică nearmonică impusă. Astfel, se stabilesc condițiile în care se realizează mișcări periodice ale sistemului studiat. Pentru aceste mișcări periodice se arată că în general condițiile de stabilitate nu sînt satisfăcute. Dacă mișcarea extremității limitatorului este armonică, rezultă cazul prezentat în lucrarea [2] unde stabilitatea s-a studiat independent de condițiile mișcării.

STABILIREA ȘI INTEGRAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII

2. Sistemul este format dintr-o masă liberă m care se mișcă pe verticală, fiind simplu rezemată pe arcul vertical cu constanta elastică k (fig. 1). Extremitatea inferioară a arcului execută o mișcare periodică după legea $f=f(\omega t+\varphi_0)$ cu perioada $T=\frac{2\pi}{\omega}$ (ω fiind pulsația).

În mișcarea sa masa m este fie în contact cu arcul, fie se deplasează liber desprinzîndu-se de arc. Ecuația diferențială a mișcării relative a masei m în contact cu arcul este

$$m\ddot{x}=P-m\ddot{f}(\omega t+\varphi_0)-kx \qquad (1)$$

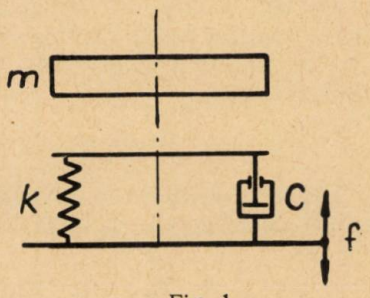

Fig. 1.

unde x reprezintă deplasarea relativă a masei m față de extremitatea inferioară a arcului sau deformarea arcului măsurată pozitiv în sensul descendent, iar φ_0 unghiul de fază corespunzător momentului inițial $t=0$. Folosind notațiile $\tau=\omega t$, $\xi=\sqrt{\frac{k}{m\omega^2}}$, $a=\frac{P}{m\omega^2}$ ecuația diferențială (1) devine:

$$x''+\xi^2 x=a-f''(\tau+\varphi_0). \tag{2}$$

Condițiile inițiale ale mișcării cu care se vor determina constantele de integrare, sînt:

$$x=0,\ x'=x_0' \text{ pentru } \tau=0. \tag{3}$$

Legea mișcării, soluție a ecuației (2), este:

$$x=a\frac{1-\cos\xi\tau}{\xi^2}+\frac{x_0'\sin\xi\tau}{\xi}-\frac{1}{\xi}\int_0^\tau f''(\theta+\varphi_0)\sin\xi(\tau-\theta)\,d\theta \tag{4}$$

sau

$$x=a\frac{1-\cos\xi\tau}{\xi^2}+\frac{x_0'\sin\xi\tau}{\xi}+\frac{f'(\varphi_0)\sin\xi\tau}{\xi}-f(\tau+\varphi_0)+$$

$$+f(\varphi_0)\cos\xi\tau+\xi\int_0^\tau f(\theta+\varphi_0)\sin\xi(\tau-\theta)\,d\theta \tag{4'}$$

Din (4') rezultă legea corespunzătoare a vitezei:

$$x'=a\frac{\sin\xi\tau}{\xi}+x_0'\cos\xi\tau-\xi f(\varphi_0)\sin\xi\tau+f'(\varphi_0)\cos\xi\tau-f'(\tau+\varphi_0)$$

$$+\xi^2\int_0^\tau f(\theta+\varphi_0)\cos\xi(\tau-\theta)\,d\theta. \tag{5}$$

Mișcarea determinantă prin ecuațiile (4'), (5) se realizează în intervalul $0\leqslant\tau\leqslant\tau_1$, cînd masa este în contact cu arcul. În momentul $\tau=\tau_1$ masa se desprinde de arc după care execută o mișcare liberă.

Ecuația diferențială a mișcării relative libere a masei m, folosind aceleași notații, va fi:

$$x''=a-f''(\tau+\varphi_0). \tag{6}$$

Pentru ca mișcarea sistemului să fie periodică este necesar ca într-o perioadă condițiile inițiale și finale ale mișcării să fie aceleași, iar perioada mișcării să fie un multiplu al perioadei de excitație. Astfel la sfîrșitul intervalului va trebui să avem:

$$x=0,\ x'=x_0' \text{ pentru } \tau=2\pi i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{7}$$

Legea mișcării în intervalul $\tau_1\leqslant\tau\leqslant 2\pi i$ este soluția ecuației (6), iar constantele de integrare se determină din condițiile (7). Astfel rezultă:

$$x=\frac{a}{2}(\tau-2\pi i)^2+(\tau-2\pi i)\,x_0'+f(\varphi_0)+(\tau-2\pi i)\,f'(\varphi_0)-f(\tau+\varphi_0) \tag{8}$$

De asemenea prin derivare se obține:

$$x'=a(\tau-2\pi i)+x_0'+f'(\varphi_0)-f'(\tau+\varphi_0). \tag{9}$$

La momentul $\tau=\tau_1$, $(0\leqslant\tau_1\leqslant 2\pi i)$ cînd are loc desprinderea masei de arc, deplasarea relativă calculată din legile mișcării (4), (8) trebuie să fie nulă, iar viteza calculată din (5) și (9) să aibă aceeași valoare x_1'. De aici rezultă pentru determinarea mărimilor x_0', φ_0, τ_1 următorul sistem de ecuații:

$$a\frac{1-\cos\xi\tau_1}{\xi^2}+\frac{x_0'\sin\xi\tau_1}{\xi}+f(\varphi_0)\cos\xi\tau_1+\frac{f'(\varphi_0)\sin\xi\tau_1}{\xi}-f(\tau_1+\varphi_0)+$$

$$+\xi\int_0^{\tau_1}f(\theta+\varphi_0)\sin\xi(\tau_1-\theta)\,d\theta=0 \tag{10}$$

$$\frac{a}{2}(\tau_1-2\pi i)^2+(\tau_1-2\pi i)\,x_0'+f(\varphi_0)+(\tau_1-2\pi i)\,f'(\varphi_0)-f(\tau_1+\varphi_0)=0 \tag{11}$$

$$\frac{a\sin\xi\tau_1}{\xi}+x_0'\cos\xi\tau_1-\xi f(\varphi_0)\sin\xi\tau_1+f'(\varphi_0)\cos\xi\tau_1-f'(\tau_1+\varphi_0)+$$

$$+\xi^2\int_0^{\tau_1}f(\theta+\varphi_0)\cos\xi(\tau_1-\theta)\,d\theta=a(\tau_1-2\pi i)+x_0'+f'(\varphi_0)-f'(\tau_1+\varphi_0). \tag{12}$$

Dacă se scoate x_0' din ecuația (11) și se înlocuiește în ecuațiile (10) și (12) se obține:

$$\left[\cos\xi\tau_1-\frac{\sin\xi\tau_1}{\xi(\tau_1-2\pi i)}\right]f(\varphi_0)+\left[\frac{\sin\xi\tau_1}{\xi(\tau_1-2\pi i)}-1\right]f(\tau_1+\varphi_0)+$$

$$+\xi\int_0^{\tau_1}f(\theta+\varphi_0)\sin\xi(\tau_1-\theta)\,d\theta+\left[\frac{1-\cos\xi\tau_1}{\xi^2}-\frac{(\tau_1-2\pi i)\sin\xi\tau_1}{2\xi}\right]a=0 \tag{13}$$

$$\left[\frac{1-\cos\xi\tau_1}{\tau_1-2\pi i}-\xi\sin\xi\tau_1\right]f(\varphi_0)+\frac{\cos\xi\tau_1-1}{\tau_1-2\pi i}f(\tau_1+\varphi_0)+\xi^2\int_0^{\tau_1}f(\theta+\varphi_0)\cos\xi(\tau_1-\theta)\,d\theta+$$

$$+\left[\frac{\sin\xi\tau_1}{\xi}-\frac{\tau_1-2\pi i}{2}(1+\cos\xi\tau_1)\right]a=0. \tag{14}$$

Din acest sistem de ecuații se calculează mărimile φ_0 și τ_1 care determină mișcările periodice ale sistemului. Condiția ca să existe mișcări periodice este ca aceste ecuații să aibă rădăcini reale pentru τ_1 în intervalul $(0\leqslant\tau_1\leqslant 2\pi i)$, iar pentru φ_0 în intervalul $(-\pi\leqslant\varphi_0\leqslant\pi)$.

STUDIUL STABILITĂȚII MIȘCĂRILOR PERIODICE

3. Pentru a vedea dacă mișcările periodice determinate sînt și stabile, vom da perturbații mici parametrilor mișcării. Vom presupune că datorită unor perturbații inițiale, pentru ciclul de ordinul j al mișcării care începe în momentul $\tau=0$, avem: $\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi_j$ și $x'=x_0'+\Delta x_j$. Tot astfel, în momentul desprinderii masei de arc rezultă $\tau=\tau_1+\Delta\tau_1$.

Legile mișcării (4′) și (5) sînt valabile, dar în loc de φ_0 și x_0' se vor introduce valorile φ și x' de mai sus.

Mișcarea liberă a masei începe la momentul $\tau=\tau_1+\Delta\tau_1$ și se termină pentru $\tau=2\pi i+\Delta\tau_2$ cu viteza $x'=x_0'+\Delta x_{j+1}'$ cînd ajunge din nou în contact cu arcul. În acest caz sînt valabile legile mișcării (8), (9) dar cu introducerea valorilor finale de mai sus. Considerînd apoi momentul $\tau=\tau_1+\Delta\tau_1$ al desprinderii masei de arc, din legile mișcării, după eliminarea termenilor finiți datorită existenței condițiilor (10), (11) și (12) între parametrii mișcării periodice la momentul $\tau=\tau_1$, ne limităm la termenii liniari în raport cu perturbațiile și se obține:

$$\frac{\sin\xi\tau_1}{\xi}\Delta x_j'+x_1'\Delta\tau_1+\Big[f'(\varphi_0)\cos\xi\tau_1+\frac{f''(\varphi_0)\sin\xi\tau_1}{\xi}-f'(\tau_1+\varphi_0)-$$

$$-\xi f(\varphi_0)\sin\xi\tau_1+\xi^2\int_0^{\tau_1}f(\theta+\varphi_0)\cos\xi(\tau_1-\theta)\,d\theta\Big]\Delta\varphi_j=0 \tag{15}$$

$$(\tau_1-2\pi i)\,\Delta x_j'+$$

$$+x_1'\Delta\tau_1+[f'(\varphi_0)+(\tau_1-2\pi i)f''(\varphi_0)-f'(\tau_1+\varphi_0)]\Delta\varphi_j-[x_0'+(\tau_1-2\pi i)x_0'']\Delta\tau_2=0 \tag{16}$$

$$\cos\xi\tau_1\Delta x_j'+x_1''\Delta\tau_1+[-\xi f'(\varphi_0)\sin\xi\tau_1+f''(\varphi_0)\cos\xi\tau_1-f''(\tau_1+\varphi_0)+$$

$$+\xi^2[f(\tau_1+\varphi_0)-\xi^2 f(\varphi_0)\cos\xi\tau_1-\xi^3\int_0^{\tau_1}f(\theta+\varphi_0)\sin\xi(\tau_1-\theta)\,d\theta]\Delta\varphi_j=$$

$$=\Delta x_{j+1}'+x_1''\Delta\tau_1+[f''(\varphi_0)-f''(\tau_1+\varphi_0)]\Delta\varphi_j-x_0''\Delta\tau_2. \tag{17}$$

În ecuațiile (15), (16) și (17) s-au folosit valorile

$$x_1'=a\frac{\sin\xi\tau_1}{\xi}+x_0'\cos\xi\tau_1-\xi f(\varphi_0)\sin\xi\tau_1+f'(\varphi_0)\cos\xi\tau_1-f'(\tau_1+\varphi_0)+$$

$$+\xi^2\int_0^{\tau_1}f(\theta+\varphi_0)\cos\xi(\tau_1-\theta)\,d\theta$$

$$x_1''=a\cos\xi\tau_1-\xi x_0'\sin\xi\tau_1-\xi^2 f(\varphi_0)\cos\xi\tau_1-\xi f'(\varphi_0)\sin\xi\tau_1-f''(\tau_1+\varphi_0)+$$

$$+\xi^2 f(\tau_1+\varphi_0)-\xi^3\int_0^{\tau_1}f(\theta+\varphi_0)\sin\xi(\tau_1-\theta)\,d\theta \tag{18}$$

obținute pentru mișcarea periodică din relația (5) pentru $\tau=\tau_1$. De asemenea s-a folosit valoarea

$$x_0''=a-f''(\varphi_0) \tag{18′}$$

obținută din ecuația diferențială a mișcării (6) pentru $\tau=2\pi i$.

Ținînd seama că perturbația defazajului de la sfîrșitul ciclului se compune din perturbația defazajului de la începutul ciclului și din cea a perioadei ciclului adică: $\Delta\varphi_{j+1}=\Delta\varphi_j+\Delta\tau_2$ în baza ecuațiilor (15), (16), (17) rezultă:

$$\Delta\varphi_{j+1}=A\Delta\varphi_j+B\Delta x_j';\quad \Delta x_{j+1}'=C\Delta\varphi_j+D\Delta x_j'. \tag{19}$$

Relațiile (19) care fac legătura între perturbațiile parametrilor mișcării la începutul a două cicluri succesive formează un sistem de ecuații cu diferențe finite. Pentru a rezolva acest sistem se iau soluții de forma $\Delta\varphi_j = \Phi\beta^j$; $\Delta x'_j = V\beta^j$. Pentru ca sistemul liniar omogen în Φ și V obținut să admită soluții diferite de zero, trebuie ca determinantul sistemului să fie nul adică :

$$\begin{vmatrix} A-\beta & B \\ C & D-\beta \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Aceasta este ecuația caracteristică în β care se mai poate scrie

$$\beta^2 - (A+D)\,\beta + (AD - BC) = 0. \tag{20'}$$

Expresiile coeficienților A, B, C și D din ecuațiile (19) sînt

$$A = [K - (\tau_1 - 2\pi i)\,K']\,x_0'^{-1}; \quad C = \{Kx_0'' - K'[x_0' + (\tau_1 - 2\pi i)\,x_0'']\}\,x_0'^{-1}$$
$$B = \left[(\tau_1 - 2\pi i)\cos\xi\tau_1 - \frac{\sin\xi\tau_1}{\xi}\right] x_0'^{-1}; \quad D = \left\{\cos\xi\tau_1\,[x_0' + (\tau_1 - 2\pi i)\,x_0''] - \right. \tag{21}$$
$$\left. - x_0''\frac{\sin\xi\tau_1}{\xi}\right\} x_0'^{-1}$$

unde

$$K = x_0' + (\tau_1 - 2\pi i)\,x_0'' + f'(\varphi_0) - f'(\varphi_0)\cos\xi\tau_1 - \frac{f''(\varphi_0)\sin\xi\tau_1}{\xi} + (\tau_1 - 2\pi i)\,f''(\varphi_0) +$$
$$+ \xi f(\varphi_0)\sin\xi\tau_1 - \xi^2\int_0^{\tau_1} f(\theta+\varphi_0)\cos\xi(\tau_1-\theta)\,d\theta \tag{22}$$
$$K' = x_0'' + \xi f'(\varphi_0)\sin\xi\tau_1 + f''(\varphi_0) - f''(\varphi_0)\cos\xi\tau_1 + \xi^2 f(\varphi_0)\cos\xi\tau_1 - \xi^2 f(\tau_1+\varphi_0) +$$
$$+ \xi^3\int_0^{\tau_1} f(\theta+\varphi_0)\sin\xi(\tau_1-\theta)\,d\theta.$$

După cum se constată K' este chiar derivata lui K în raport cu τ_1.

Acești coeficienți se mai pot transforma ținînd seama de condițiile (10), (11) și (12) în care se realizează mișcările periodice ale sistemului. Expresia lui K din (22), dacă se folosesc condițiile (10), (11) și (12) și valoarea (18'), devine :

$$K = x_0'\cos\xi\tau_1 + x_0''\frac{\sin\xi\tau_1}{\xi} \tag{23}$$

iar expresia lui K' se obține prin derivare în raport cu τ_1.

Cu aceste valori ale lui K și K' se pot calcula coeficienții ecuației caracteristice (20') obținîndu-se

$$A + D = 2\cos\xi\tau_1 + (\tau_1 - 2\pi i)\,\xi\sin\xi\tau_1$$
$$AD - BC = 1. \tag{24}$$

Astfel ecuația caracteristică a sistemului devine:

$$\beta^2-[2\cos\xi\tau_1+(\tau_1-2\pi i)\,\xi\sin\xi\tau_1]\beta+1=0. \tag{25}$$

Deoarece termenul liber este egal cu unitatea rezultă că numai una din cele două rădăcini ale ecuației caracteristice ar putea avea modulul subunitar.

Mișcările periodice vor fi instabile dacă rădăcinile ecuației caracteristice (25) au modulul diferit de unitate. În caz că rădăcinile sînt în modul egale cu unitatea, atunci pentru studiul stabilității nu este suficient să ne limităm la termeni liniari în perturbații. În acest caz trebuie considerați în dezvoltare și termenii de grad superior unității.

Pentru a preciza lucrurile vom studia semnul discriminantului:

$$E=\sin\xi\tau_1\{[(\tau_1-2\pi i)^2\xi^2-4]\sin\xi\tau_1+4(\tau_1-2\pi i)\,\xi\cos\xi\tau_1\}=$$

$$=\sin^2\xi\tau_1\left[(2\pi i-\tau_1)\,\xi-2\operatorname{ctg}\frac{\xi\tau_1}{2}\right]\left[(2\pi i-\tau_1)\,\xi+2\operatorname{tg}\frac{\xi\tau_1}{2}\right]. \tag{26}$$

Dacă $E>0$ ecuația caracteristică admite rădăcini reale neegale din care una are modulul mai mare decît unitatea, deci mișcările periodice sînt instabile. Dacă $E\leqslant 0$ ecuația caracteristică admite sau rădăcini egale sau rădăcini imaginare, fiecare avînd modulul egal cu unitatea, deci stabilitatea mișcării periodice nu poate fi precizată decît folosind și aproximațiile de ordin superior.

Stabilirea semnului pentru discriminantul E se poate face matematic construind două curbe corespunzătoare ultimilor doi factori din E în planul parametrilor $u=\xi\tau_1$, $v=2\pi i\xi$. Aceste curbe au următoarele ecuații:

$$v=u-2\operatorname{tg}\frac{u}{2} \tag{27}$$

și

$$v=u+2\operatorname{ctg}\frac{u}{2}. \tag{28}$$

Curbele considerate au asimptotele verticale $u=(2r-1)\pi$ ($r=1, 2, 3, \ldots$) în cazul ecuației (27) și $u=2r\pi$ ($r=1, 2, 3, \ldots$) în cazul ecuației (28). De asemenea ele au puncte de inflexiune cu tangentă orizontală situate la intersecțiile cu prima bisectoare a axelor, și anume: $u=v=2r\pi$ în cazul ecuației (27) ($r=1, 2, 3, \ldots$), și $u=v=(2r-1)\pi$ în cazul ecuației (28). Fiecare ramură ce corespunde uneia din cele două ecuații are ca centru de simetrie chiar punctul de inflexiune. Toate ramurile se pot obține una din alta printr-o translație în direcția primei bisectoare.

În fig. 2 sînt reprezentate curbele de ecuații (27), (28). Domeniile de instabilitate nu sînt haşurate, iar în domeniile haşurate stabilitatea nu poate fi precizată cu metoda primei aproximări. În această problemă s-a neglijat total amortizarea, care există totuși în orice sistem și influențează asupra stabilității mișcărilor.

Ținînd seama că $\tau_1<2\pi i$ vom avea $u<v$, adică se vor considera numai domenii situate deasupra primei bisectoare.

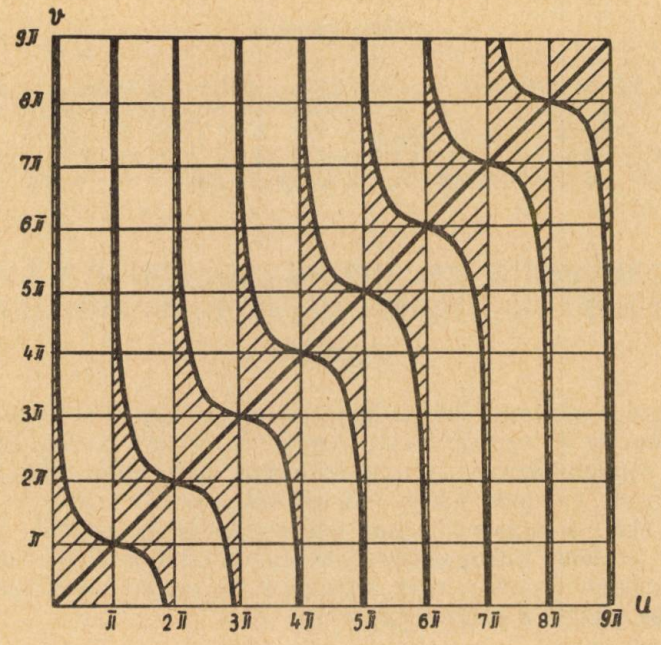

Fig. 2.

Să considerăm numai domenii haşurate şi să vedem ce valori poate avea τ_1 pentru diferite valori ale lui ξ. Astfel pentru $\xi \leqslant \frac{1}{2i}$ se obține $v=2\pi i\xi<\pi$ şi din fig. 2 rezultă $0<u<\pi$ deci $0<\tau_1<\frac{\pi}{\xi}$. În același mod pentru $\frac{1}{2i} \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{i}$ se obține $\pi<v<2\pi$ şi din fig. 2 rezultă că în funcție de valorile lui ξ e posibil ca u să ia orice valoare mai mică decît 2π şi ca urmare τ_1 va fi mai mic decît $\frac{2\pi}{\xi}$. Pentru ξ foarte apropiat de $\frac{1}{i}$, v va fi foarte apropiat de 2π. În acest caz τ_1 poate să ia sau valori mici foarte apropiate de zero, sau valori cuprinse între $\frac{\pi}{\xi}$ şi $\frac{2\pi}{\xi}$. Pe măsură ce ξ are valori mai mari, numărul domeniilor haşurate ce dau valorile corespunzătoare ale lui τ_1 creşte.

Rezultatele stabilite sînt valabile şi pentru cazul unui vibrator supus la o forță perturbatoare periodică, simplu rezemat pe un arc ce are extremitatea inferioară fixă. În acest caz, în locul lui $f''(\tau+\varphi_0)$ se va introduce forța perturbatoare. Dacă forța perturbatoare este armonică se va înlocui $f''(\tau+\varphi_0)$ cu $-\sin(\tau+\varphi_0)$. Este cazul considerat în lucrarea [2]. Chiar în acest caz particular rezultatele se vor deosebi de cele din lucrarea [2] deoarece, în prezenta lucrare se determină şi se iau în considerare condițiile de periodicitate ale mișcării.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Silaș, *Mecanica, Vibrații mecanice.* Editura didactică și Pedagogică, București 1968.
2. Осмаков С. А., Савинов О. А., О движении вибратора свободно опирающегося на упругий ограничитель. Изв. АН СССР ОТН. 1960 № 3.
3. Gh. Silaș, M. Rădoi, L. Brîndeu, H. Klepp, A. Hegedüs, *Culegere de probleme de vibrații mecanice,* vol. I, Editura Tehnică — București 1967.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ МАССЫ ПО УПРУГОМУ ОГРАНИЧИТЕЛЮ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ДВИЖЕНИЕМ

(РЕЗЮМЕ)

В работе рассматривается вертикальное движение свободно опирающейся массы по одному концу упругого ограничителя, другой конец совершает периодическое негармоническое движение. Для рассматриваемой системы, условия в которых происходят периодические движения (10), (11), (12), а также условия устойчивости (25), (26), указывается что вообще условия устойчивости не выполняются. Если считается что движение концов ограничителя является гармоническим, то получается случай приведенный в работе [2].

MOUVEMENTS PÉRIODIQUES D'UNE MASSE LIBRE SUR UN LIMITATEUR ÉLASTIQUE AYANT UN MOUVEMENT PÉRIODIQUE

(RÉSUMÉ)

On étudie dans le travail le mouvement vertical d'une masse libre, simplement appuyée sur l'une des extrémités d'un limitateur élastique, tandis que l'autre extrémité exécute un mouvement périodique non harmonique imposé.

Pour le système étudié on établit les conditions où l'on efectue des mouvements périodiques (10), (11), (12) et les conditions de stabilité (25), (26).

On montre que les conditions de stabilité ne sont pas en général satisfaites. Si l'on considère que le mouvement de l'extrémité du limitateur est harmonique, on obtient les résultats présentés dans le travail [2].

MIȘCĂRILE VIBROPERCUTANTE ALE PARTICOLEI MATERIALE EXCITATE DE O PLATFORMĂ MOBILĂ

GH. SILAȘ, A. HEGEDUS, DOINA BECHERESCU

INTRODUCERE

1. În ultimul timp din ce în ce mai mult se folosesc mașini vibratoare în domeniul transportului. În aceste mașini organul de bază este o platformă mobilă care execută mișcări vibratorii după una sau mai multe direcții și astfel antrenează materialul de transportat.

În funcție de mișcarea materialului sau a pieselor unitare pe suprafața vibratoare, se folosesc două feluri de mașini vibratoare și anume: mașini care lucrează în regim cu desprindere și mașini care lucrează în regim fără desprindere a materialului de suprafața vibratoare.

În cele ce urmează ne vom referi la mașini din prima categorie care s-au dovedit a fi mai productive pentru anumite materiale în ceea ce privește viteza medie de transport. Mașinile vibratoare din a doua categorie se folosesc în primul rînd în acele cazuri cînd unele procese tehnologice le cer, ca de exemplu, la creierea unui flux orientat de piese unitare.

Antrenarea platformei mobile se poate realiza în două feluri: a) o antrenare cinematică în care caz platforma are o mișcare impusă [1], [2], [3], [4], [5]; b) mișcarea este produsă de anumite forțe periodice create inerțial, de electromagneți, etc. În cazul al doilea de obicei platforma este suspendată elastic [5], [6], [7], [8].

Problema principală la aceste mașini este studiul mișcării materialului transportat. În cazul regimurilor de mișcare cu desprinderi au loc ciocniri între particolele transportate și platforma mobilă, astfel încît avem de a face cu mișcări vibropercutante. Studiul acestor mișcări se face în diferite ipoteze. În unele lucrări se presupune că excitația este armonică sau periodică oarecare, dar se neglijează forțele de rezistență a mediului [1], [2], [4], [6], iar în altele se ține seamă și de forțele de amortizare ce apar în timpul zborului [3], [5], [7].

În majoritatea lucrărilor citate se presupune că traiectoriile vibrațiilor punctelor platformei se află în planul vertical care conține normala la plat-

formă. Uneori prezintă interes un caz mai general şi anume cazul în care vibraţiile punctelor platformei nu se află în planul care conţine normala la platformă. O astfel de problemă este tratată în lucrarea [4] în care se studiază mişcările particolei materiale cu zbor continuu în ipoteza că platforma are o mişcare armonică şi neglijînd forţele de amortizare în timpul zborului.

În prezenta lucrare ne-am propus să reluăm problema studiată în [4] cu scopul de a o generaliza. Vom studia mişcările vibropercutante ale particolei cu zbor continuu presupunînd că platforma are o mişcare periodică oarecare şi că particola întîmpină în timpul zborului o forţă de amortizare de natură vîscoasă (coeficientul frecării vîscoase fiind c).

În aceste ipoteze vom căuta condiţiile în care apar mişcări vibropercutante periodice şi vom studia stabilitatea acestora.

DETERMINAREA LEGII MIŞCARII PARTICOLEI INTRE DOUĂ CIOCNIRI SUCCESIVE

2. Se consideră planul $ABCD$, perpendicular pe planul vertical $x_2'Ox_3'$, înclinat cu unghiul α faţă de planul orizontal $x_1'Ox_3'$. Rotind planul $ABCD$ în jurul muchiei AB cu unghiul ε se obţine poziţia $ABC'D'$.

Acest plan va fi platforma aspră mobilă care execută o mişcare de translaţie rectilinie periodică nearmonică paralelă cu planul fix $x_2'Ox_3'$ şi formînd unghiul β cu direcţia muchiei AB (fig. 1) după legea

$$\xi(t)=\xi_0\psi(\omega t), \qquad (1)$$

unde $\psi(\omega t)$ este o funcţie adimensională, periodică, avînd perioada $T=\frac{2\pi}{\omega}$ iar ξ_0 cea mai mare valoare a funcţiei $\xi(t)$ într-o perioadă. Se presupune că funcţia $\psi(\omega t)$ este derivabilă cel puţin de două ori şi derivatele sale sînt de asemenea funcţii periodice cu aceeaşi perioadă.

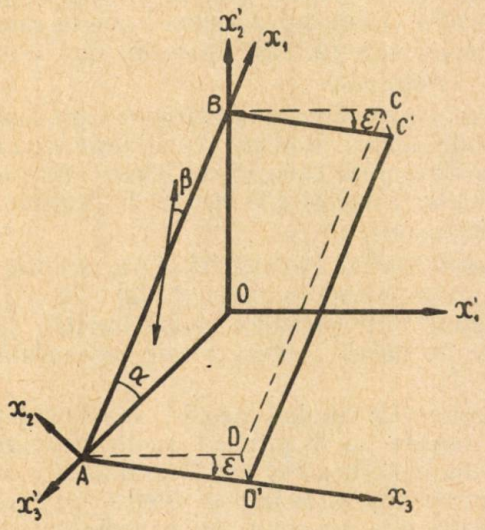

Fig. 1.

Se va studia mişcarea relativă a particolei faţă de platforma mobilă. Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării între două ciocniri consecutive de ordinul i şi $i+1$ sînt:

$$m\ddot{x}_1+c\dot{x}_1=-mg\sin\alpha-$$
$$-m\xi_0\cos\beta\ddot{\psi}(\omega t)-c\xi_0\cos\beta\dot{\psi}(\omega t)$$

$$m\ddot{x}_2+c\dot{x}_2=[-mg\cos\alpha-m\xi_0\sin\beta\ddot{\psi}(\omega t)-c\xi_0\sin\beta\dot{\psi}(\omega t)]\cos\varepsilon \qquad (2)$$

$$m\ddot{x}_3+c\dot{x}_3=[-mg\cos\alpha-m\xi_0\sin\beta\ddot{\psi}(\omega t)-c\zeta_0\sin\beta\dot{\psi}(\omega t)]\sin\varepsilon.$$

Introducînd mărimile adimensionale

$$\tau=\omega t;\quad h=\frac{c}{m\omega};\quad \nu=\frac{g}{\xi_0\omega^2}$$
$$a_1=\nu\sin\alpha;\quad a_2=a_3=\nu\cos\alpha \tag{3}$$
$$b_1=\cos\beta;\quad b_2=b_3=\sin\beta$$

și coordonatele adimensionale

$$u_1=\frac{x_1}{\xi_0},\quad u_2=\frac{x_2}{\xi_0\cos\varepsilon},\quad u_3=\frac{x_3}{\xi_0\sin\varepsilon}, \tag{4}$$

ecuațiile (2) devin:

$$u_j''+hu_j'=-a_j-b_j\psi''(\tau)-hb_j\psi'(\tau),\quad (j=1,\ 2,\ 3). \tag{5}$$

Sistemul (5) este format din trei ecuații diferențiale independente care se pot integra separat. Soluția sistemului se poate determina prin metoda variației constantelor arbitrare și este de forma:

$$u_j=C_j+D_je^{-h(\tau-\tau_i)}-\frac{a_j}{h}\tau-b_j\psi(\tau)+\frac{a_j}{h^2},\quad (j=1,\ 2,\ 3) \tag{6}$$

unde prin τ_i s-a notat momentul de timp adimensional al ciocnirii de ordinul i. Constantele de integrare C_j și D_j se determină din condițiile inițiale.

În momentul τ_i al ciocnirii, coordonata $u_2=0$, iar valorile coordonatelor adimensionale u_3 și u_3 le notăm cu u_{1i} și u_{3i}. Se mai notează componentele adimensionale ale vitezei relative înainte de ciocnire prin v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}. După ciocnire vitezele vor fi $(1-\lambda)v_{1i}$, $-Rv_{2i}$ și $(1-\lambda)v_{3i}$, unde λ și R sînt coeficienții de restabilire a vitezelor relative tangențiale și normale ($0\leqslant\lambda\leqslant1$; $0\leqslant R\leqslant1$) [1].

Astfel condițiile inițiale sînt:

$$\tau=\tau_i\begin{cases}u_1=u_{1i},\quad u_2=u_{2i},\quad u_3=u_{3i}\\ v_j=\rho_jv_{ji}\qquad (j=1,\ 2,\ 3)\end{cases} \tag{7}$$

unde $\rho_1=\rho_3=1-\lambda$; $\rho_2=R$.

Cu ajutorul acestor condiții se determină cele șase constante de integrare și ecuațiile mișcării (6) ale particolei între două ciocniri consecutive devin:

$$u_j=u_{j,i}-\frac{a_j}{h}(\tau-\tau_i)-b_j[\psi(\tau)-\psi(\tau_i)]+$$
$$+\frac{1}{h}\left[\rho_jv_{j,i}+b_j(\psi'(\tau_i)+\frac{a_j}{h}\right][1-e^{-h(\tau-\tau_i)}],\quad (j=1,\ 2,\ 3) \tag{8}$$

iar componentele adimensionale ale vitezei relative vor fi:

$$v_j=-\frac{a_j}{h}-b_j\psi'(\tau)+\left[\rho_jv_{j,i}+b_j\psi'(\tau_i)+\frac{a_j}{h}\right]e^{-h(\tau-\tau_i)},\quad (j=1,\ 2,\ 3). \tag{9}$$

Să notăm cu τ_{i+1} momentul ciocnirii de ordinul $i+1$, cu $u_{1,i+1}$, $u_{2,i+1}=0$, $u_{3,i+1}$ coordonatele adimensionale ale particolei în acest moment și cu $v_{1,i+1}$, $v_{2,i+1}$, $v_{3,i+1}$ componentele adimensionale ale vitezei la începutul ciocnirii de ordinul $i+1$. Pe baza relațiilor (8) și (9) se pot scrie ecuațiile de trecere de la ciocnirea de ordinul i la ciocnirea de ordinul $i+1$.

$$-u_{j,i+1}+u_{j,i}-\frac{a_j}{h}(\tau_{i+1}-\tau_i)-b_j[\psi(\tau_{i+1})-\psi(\tau_i)]+$$
$$+\frac{1}{h}\left[\rho_j v_{j,i}+b_j\psi'(\tau_i)+\frac{a_j}{h}\right][1-e^{-h(\tau_{i+1}-\tau_i)}]=0 \quad (j=1,\ 2,\ 3) \tag{10}$$

$$-v_{j,i+1}-\frac{a_j}{h}-b_j\psi'(\tau_{i+1})+\left[\rho_j v_{ji}+b_j\psi'(\tau_i)+\frac{a_j}{h}\right]e^{-h(\tau_{i+1}-\tau_i)}=0 \quad (j=1,\ 2,\ 3) \tag{11}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (10) și (11) se pot studia atît mișcările tranzitorii cît și cele periodice ale particolei. Din punct de vedere practic prezintă interes regimurile de mișcare periodice.

STABILIREA PARAMETRILOR MIȘCĂRILOR PERIODICE

3. În cele ce urmează se caută regimuri de mișcare în care ciocnirea dintre particolă și platformă se repetă cu aceeași viteză. Pentru ușurința exprimării vom denumi acest regim periodic. Pentru ca să apară un astfel de regim de mișcare este necesar ca durata mișcării între două ciocniri succesive să fie egală sau multiplă perioadei mișcării platformei și componentele vitezei la începutul unei ciocniri să fie egale cu componentele vitezei la începutul ciocnirii precedente, adică să avem:

$$\tau_{i+1}=\tau_i+2\pi n, \quad u_{2i}=u_{2,i+1}=0, \quad v_{j,i+1}=v_{j,i}. \tag{12}$$

Introducînd condițiile (12) în relațiile (10) și (11) se obține următorul sistem pentru determinarea parametrilor τ_i^*; $v_{j,i}^*$ $(j=1,\ 2,\ 3)$; $u_{j,i+1}^*-u_{j,i}^*$ $(j=1,\ 3)$ corespunzători regimului de mișcare periodic.

$$-u_{j,i+1}^*+u_{j,i}^*-r\frac{a_j}{h}+\frac{1}{h}\left[\rho_j v_{j,i}^*+b_j\psi'(\tau_i^*)+\frac{a_j}{h}\right](1-e^{-rh})=0 \tag{13}$$

$$-v_{j,i+1}^*-\frac{a_j}{h}-b_j\psi'(\tau_i^*)+\left[\rho_j v_{j,i}^*+b_j\psi'(\tau_i^*)+\frac{a_j}{h}\right]e^{-rh}=0, \tag{14}$$

unde $r=2\pi n$.

Din sistemul de ecuații (13) și (14) se obțin:

$$\psi'(\tau_i^*)=\frac{a_2}{b_2}\left[r\frac{1+Re^{-rh}}{(1+R)(1-e^{-rh})}-\frac{1}{h}\right] \tag{15}$$

$$v_{2,i}^*=-\frac{ra_2}{1+R} \tag{16}$$

$$v^*_{j,i} = -\left[\frac{a_j}{h} + b_j\psi'(\tau^*_i)\right]\frac{1-e^{-rh}}{1-\rho_j e^{-rh}}, \quad (j=1, 3) \tag{17}$$

$$u^*_{j,i+1} - u^*_{j,i} = -r\frac{a_j}{h} + \frac{1}{h}\left[\rho_j v^*_{j,i} + b_j\psi'(\tau^*_i) + \frac{a_j}{h}\right](1-e^{-rh}), \quad (j=1, 3). \tag{18}$$

Din ecuația (15) rezultă momentele τ^*_i corespunzătoare mișcării periodice. Din relațiile (16) și (17) se determină componentele vitezei relative adimensionale la începutul ciocnirii, iar din relația (18) se determină componentele deplasării relative în raport cu platforma vibratoare.

Componentele V_1 și V_3 ale vitezei adimensionale medii de transport se obțin împărțind componenetele deplasării respective cu perioada zborului.

$$v_j = \frac{u^*_{j,i+1} - u^*_{j,i}}{2\pi n} = -\frac{a_j}{h} + \frac{1}{rh}\left[\rho_j v^*_{j,i} + b_j\psi'(\tau^*_i) + \frac{a_j}{h}\right](1-e^{-rh}), \quad (j=1, 3) \tag{19}$$

iar modulul vitezei adimensionale medii de transport este:

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_3^2}. \tag{20}$$

STUDIUL STABILITĂȚII MIȘCARILOR PERIODICE

4. Pentru studiul stabilității mișcărilor periodice determinate la punctul 3 vom aplica metoda perturbației [7], [8], [9].

Fie $\Delta\tau_i$ și $\Delta v_{j,i}$ perturbațiile lui τ^*_i și $v_{j,i}$ la ciocnirea de ordinul i, și $\Delta\tau_{i+1}$ și $\Delta v_{j,i+1}$ la ciocnirea de ordinul $i+1$. Ecuațiile (10) și (11) care sînt valabile și pentru mișcarea perturbată, ținînd seama de perturbații devin:

$$-u^*_{j,i+1} + u^*_{j,i} - \frac{a_j}{h}(\tau^*_{i+1} + \Delta\tau_{i+1} - \tau^*_i - \Delta\tau_i) - b_j[\psi(\tau^*_{i+1} + \Delta\tau_{i+1}) - \psi(\tau^*_i + \Delta\tau_i)] +$$

$$+ \frac{1}{h}\left[\rho_j(v^*_{j,i} + \Delta v_{j,i}) + b_j\psi'(\tau^*_i + \Delta\tau_i) + \frac{a_j}{h}\right][1 - e^{-h(\tau^*_{i+1} + \Delta\tau_{i+1} - \tau^*_i - \Delta\tau_i)}] = 0 \tag{21}$$

$$-v^*_{j,i+1} - \Delta v_{j,i+1} - \frac{a_j}{h} - b_j\psi'(\tau^*_{i+1} + \Delta\tau_{i+1}) +$$

$$+ \left[\rho_j(v^*_{j,i} + \Delta v_{j,i}) + b_j\psi'(\tau^*_i + \Delta\tau_i) + \frac{a_j}{h}\right]e^{-h(\tau^*_{i+1} + \Delta\tau_{i+1} - \tau^*_i - \Delta\tau_i)} = 0. \tag{22}$$

Se consideră că perturbațiile sînt mici și de aceea ecuațiile (21) și (22) se pot liniariza. Deoarece $\tau^*_{i+1} = \tau^*_i + r$ și $v^*_{j,i+1} = v^*_{j,i}$, termenii finiți pe baza ecuațiilor (13) și (14) se reduc. Neglijînd termenii finiți care conțin perturbații începînd cu gradul doi, se obține următorul sistem liniar și omogen în perturbații.

$$\left\{-\frac{a_j}{h} - b_j\psi'(\tau^*_{i+1}) + \left[\rho_j v^*_{j,i} + b_j\psi'(\tau^*_i) + \frac{a_j}{h}\right]e^{-rh}\right\}\Delta\tau_{i+1} +$$

$$+ \left\{\frac{a_j}{h} + b_j\psi'(\tau^*_i) - \left[\rho_j v^*_{j,i+1} + b_j\psi'(\tau^*_i) + \frac{a_j}{h}\right]e^{-rh} + \frac{1}{h}b_j\psi''(\tau^*_i)(1-e^{-rh})\right\}\Delta\tau_i +$$

$$+ \frac{1}{h}\rho_j(1-e^{-rh})\Delta v_{j,i} = 0 \tag{23}$$

$$-\left\{b_j\psi''(\tau_{i+1}^*)+\left[\rho_j v_{j,i}^*+b_j\psi'(\tau_i^*)+\frac{a_j}{h}\right]he^{-rh}\right\}\Delta\tau_{i+1}+$$

$$+\left\{\left[\rho_j v_{j,i}^*+b_j\psi'(\tau_i^*)+\frac{a_j}{h}\right]he^{-rh}+b_j\psi''(\tau_i^*)\,e^{-rh}\right\}\Delta\tau_i+$$

$$+\Delta v_{j,i+1}+\rho_j e^{-rh}\Delta v_{j,i}=0. \tag{24}$$

Cu ajutorul acestor ecuații se poate studia stabilitatea mișcării după cele trei direcții. Studiul stabilității mișcării de-a lungul axelor Ax_1 și Ax_3 se reduce de fapt la studiul stabilității vitezelor relative de-a lungul acestor direcții. Astfel pentru $j=1,\ 3$, momentele τ_i^* fiind date de ecuația $x_2(\tau_i^*)=0$, se consideră numai perturbații ale vitezelor și ecuațiile în perturbații devin foarte simple:

$$\Delta v_{j,i+1}+\rho_j e^{-rh}\Delta v_{j,i}=0 \quad (j=1,\ 3) \tag{25}$$

sau

$$\Delta v_{j,i+1}=-\rho_j e^{-rh}\Delta v_{j,i} \quad (j=1,\ 3) \tag{25'}$$

Deoarece $\rho_j e^{-rh}<1$, perturbațiile scad în valoare absolută, ceea ce înseamnă că mișcarea după direcțiile axelor Ax_1 și Ax_3 este stabilă. Urmează să se cerceteze stabilitatea mișcării după axa Ax_2.

Pentru $j=2$, ținînd seama de relațiile (15) și (16), ecuațiile în perturbații (23) și (24) pot fi aduse la forma

$$v_{2,i}^*\Delta\tau_{i+1}+\left[-v_{2,i}^*+\frac{1}{h}\sin\beta\psi''(\tau_i^*)\,(1-e^{-rh})\right]\Delta\tau_i-\frac{1}{h}R\,(1-e^{-rh})\,\Delta v_{2,i}=0$$

$$-\left[\sin\beta\psi''(\tau_i^*)+h\frac{r\nu\cos\alpha}{1-e^{-rh}}e^{-rh}\right]\Delta\tau_{i+1}+ \tag{26}$$

$$+\left[h\frac{r\nu\cos\alpha}{1-e^{-rh}}e^{-rh}+\sin\beta\psi''(\tau_i^*)\,e^{-rh}\right]\Delta\tau_i-\Delta v_{2,i+1}+Re^{-rh}\Delta v_{2,i}=0.$$

Pentru sistemul (26) se caută soluții de forma

$$\Delta\tau_i=A_2s^i,\quad \Delta v_{2,i}=B_2s^i \tag{27}$$

și se obține următorul sistem de ecuații liniare și omogene în raport cu A_2 și B_2

$$\left[v_{2,i}^*s-v_{2,i}^*+\frac{1}{h}\sin\beta\psi''(\tau_i^*)\,(1-e^{-rh})\right]A_2-\frac{1}{h}R(1-e^{-rh})\,B_2=0$$

$$\left\{-\left[\sin\beta\psi''(\tau_i^*)+h\frac{r\nu\cos\alpha}{1-e^{-rh}}e^{-rh}\right]s+h\frac{r\nu\cos\alpha}{1-e^{-rh}}e^{-rh}+\sin\beta\psi''(\tau_i^*)\,e^{-rh}\right\}A_2- \tag{28}$$

$$-(s-Re^{-rh})\,B_2=0.$$

Pentru ca acest sistem să admită soluții nenule trebuie ca determinantul sistemului să fie egal cu zero. După efectuarea calculelor se obține următoarea ecuație caracteristică de gradul doi în s.

$$s^2-\left[1+R^2e^{-rh}+\frac{\sin\beta\psi''(\tau_i^*)\,(1+R)^2\,(1-e^{-rh})}{rh\nu\cos\alpha}\right]s+R^2e^{-rh}=0. \tag{29}$$

. Pentru ca această ecuație să aibă rădăcini în modul subunitare, conform criteriului lui Schur [9] trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$R^2 e^{-rh} < 1 \tag{30}$$

$$-\frac{2rh(1+R^2e^{-rh})}{(1+R)^2(1-e^{-rh})\delta^*} < \psi''(\tau_i^*) < 0, \tag{31}$$

unde $\delta^* = \frac{\sin\beta}{\nu\cos\alpha}$.

Condiția (30) este verificată întotdeauna chiar și în cazul ciocnirii perfect elastice ($R=1$). Va trebui să se cerceteze condițiile (31). Dintre toate valorile parametrilor ce rezultă din ecuația (15) se vor considera numai acelea care satisfac și inegalitățile (31).

CAZURI PARTICULARE

5. În continuare se vor analiza cîteva cazuri particulare.

Cazul a. Forța de rezistență a mediului este neglijabilă, deci $h=0$. În acest caz ecuațiile (15)–(18) și (19) prin trecere la limită devin:

$$\psi'(\tau_i^*) = r\frac{1-R}{2(1+R)\delta^*} \tag{15'}$$

$$v_{2,i}^* = -r\frac{\nu\cos\alpha}{1+R} \tag{16'}$$

$$v_{j,i}^* = \frac{r}{\lambda}a_j, \quad (j=1,\ 3) \tag{17'}$$

$$u_{j,i+1}^* - u_{j,i}^* = \frac{r^2}{2}\left(\frac{1-R}{1+R}\frac{b_j}{b_2}a_2 - \frac{2-\lambda}{\lambda}a_j\right), \quad (j=1,\ 3) \tag{18'}$$

$$V_j = \frac{r}{2}\left(\frac{1-R}{1+R}\cdot\frac{b_j}{b_2}a_2 - \frac{2-\lambda}{\lambda}a_j\right) \quad (j=1,3) \tag{19'}$$

Toate aceste relații cu excepția relației (15′) sînt identice cu cele obținute în lucrarea [4], în care se studiază aceeași problemă în ipoteza că rezistența mediului este neglijabilă și excitația este armonică. Dacă se consideră că $\psi(\tau)$ este o funcție armonică [$\psi(\tau)=\sin\tau$] atunci și ecuația (15′) pentru aflarea lui τ_i^* devine identică cu cea obținută în [4].

Rezultă din formulele de mai sus că parametrii mișcării periodice: vitezele de ciocnire, deplasările relative și vitezele medii de transport au aceeași expresie independent de forma funcției periodice $\xi(t)$, depinzînd numai de perioada și de valoarea maximă a acesteia.

Condițiile de stabilitate (30) și (31) în acest caz vor fi:

$$R < 1 \tag{30'}$$

$$\frac{-2(1+R^2)}{(1+R)^2\delta^*} < \psi''(\tau_i^*) < 0. \tag{31'}$$

Cazul b. $h=0$, $\varepsilon=0$.

În acest caz putem alege condițiile inițiale în așa fel încît mișcarea particolei să se facă în planul x_1Ax_2 care devine pentru $\varepsilon=0$ plan vertical și această mișcare poate fi studiată cu primele două ecuații (2). Parametrii mișcării periodice sînt dați de relațiile (15′) – (18′), iar condițiile de stabilitate de relațiile (30′) și (31′). Toate aceste relații sînt identice cu cele obținute în lucrarea [2].

Cazul c. $h=0$, $\varepsilon=0$, $\psi(\tau)=\sin\tau$.

În acest caz sînt valabile relațiile (16′) – (18′) și condiția (30′) iar ecuația (15′) și condițiile (31′) devin:

$$\cos\tau_i^* = \frac{r}{2}\,\frac{1-R}{(1+R)\,\delta^*} \tag{15″}$$

$$\frac{2(1+k^2)}{(1+R)^2\delta^*} > \sin\tau_i^* > 0. \tag{31″}$$

Ecuația (15″) și condițiile (31″) pot fi restrînse sub forma unei duble inegalități.

$$\frac{r}{2}\,\frac{1-R}{1+R} \leqslant \delta^* < \frac{\sqrt{r^2(1-R^2)^2+16(1+R^2)^2}}{2(1+R)^2} \tag{32}$$

care coincide cu cea obținută în lucrarea [1].

Cazul d.

Revenim la cazul cînd forța de amortizare nu este neglijabilă ($h\neq 0$), dar excitația este armonică [$\psi(\tau)=\sin\tau$].

Pentru acest caz vom determina efectiv domeniile în care există mișcări periodice stabile.

Relațiile (15) – (18) devin:

$$\cos\tau_i^* = \frac{1}{\delta^*}\left[r\,\frac{1+Re^{-rh}}{(1+R)(1-e^{-rh})} - \frac{1}{h}\right] \tag{15‴}$$

$$v_{2,i}^* = -\frac{r\nu\cos\alpha}{1+R} \tag{16‴}$$

$$v_{j,i}^* = -\left[\frac{a_j}{h} + b_j\cos\tau_i^*\right]\frac{1-e^{-rh}}{1-\rho_j e^{-rh}} \quad (j=1,\ 3) \tag{17‴}$$

$$u_{j,i+1}^* - u_{j,i}^* = -r\,\frac{a_j}{h} + \frac{1}{h}\left[\rho_j v_{j,i}^* + b_j\psi'(\tau_i^*) + \frac{a_j}{h}\right](1-e^{-rh}), \quad (j=1,\ 3). \tag{18‴}$$

Condițiile de stabilitate (30) și (31) vor fi:

$$R^2e^{-rh} < 1 \tag{30‴}$$

$$\frac{2rh(1+R^2e^{-rh})}{(1+R)^2(1-e^{-rh})\,\delta^*} > \sin\tau_i^* > 0. \tag{31‴}$$

Condiția (30‴) fiind întotdeauna verificată, pentru determinarea domeniilor în care apar mișcări periodice stabile trebuie să ne folosim de ecuația (15‴) și condițiile (31‴). Eliminînd variabila τ_i^* acestea se pot restrînge de asemenea în următoarea inegalitate dublă:

$$r\frac{1+Re^{-rh}}{(1+R)(1-e^{-rh})}-\frac{1}{h}\leqslant\delta^*<\sqrt{\left|r\frac{1+Re^{-rh}}{(1+R)(1-e^{-rh})}-\frac{1}{h}\right|^2+\left[\frac{2rh(1-R^2e^{-rh})^2}{(1+R)^2(1-e^{-rh})}\right]^2} \quad (33)$$

Pentru $h=0$ dubla inegalitate (33) trece în (32).

Pe baza inegalităților (33) se pot determina domeniile mișcărilor periodice stabile. Luînd la limită egalități în loc de inegalități se obțin două funcții care se pot reprezenta prin cîte o curbă în planul (R, δ^*) pentru valori date ale parametrilor $s=2\pi n$ și h. Zona cuprinsă între cele două curbe reprezintă domeniul mișcărilor periodice stabile.

În figura 2 sînt reprezentate diagramele de stabilitate în planul (R, δ^*) pentru $n=1$ și cîteva valori ale parametrului $h=0$; 0,1 ; 0,4 ; 0,8 ; iar în fig. 3 pentru $n=2$ și $h=0$; 0,1 ; 0,4.

Din aceste diagrame rezultă că existența forței de rezistență a mediului influențează mult domeniile de stabilitate. Curbele obținute pentru $h=0$ sînt identice cu cele găsite în [1]. O deosebire esențială față de cazul $h=0$ este că pentru $h\neq0$ există un interval de stabilitate și dacă ciocnirea este elastică $(R=1)$. Se mai constată că domeniile de stabilitate pentru $n=2$ sînt mai înguste decît cele pentru $n=1$, ceea ce arată că este mai posibil să apară mișcări vibropercutante periodice avînd perioada egală cu perioada excitației.

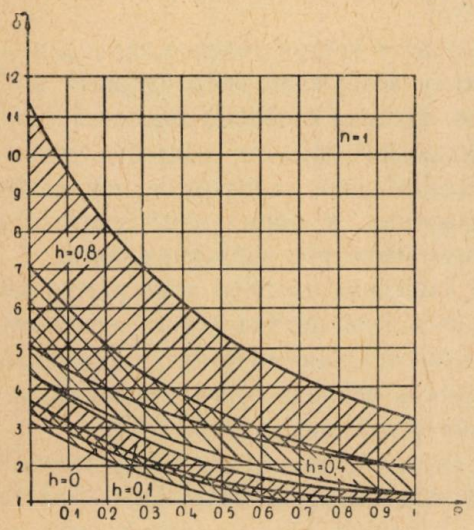

Fig. 2.

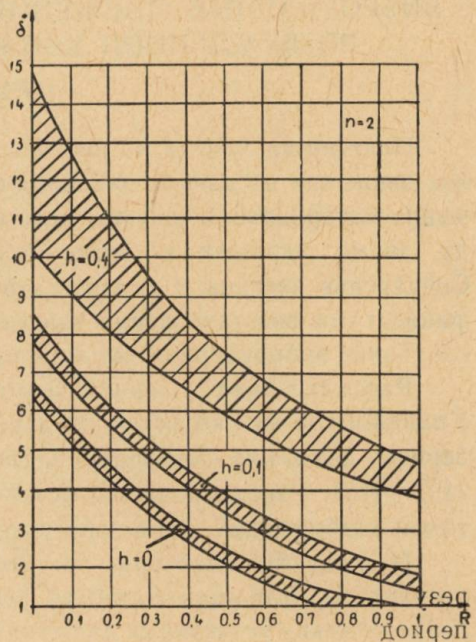

Fig. 3.

BIBLIOGRAFIE

1. И. И. Блехман, Г. Ю. Джанелидзе, *Вибрационное перемещение.* Издательство «Наука» Москва, 1964.
2. Э. Э. Лавендел, *Оптимальный закон движения лотка с заданными пределами ускорения при вибротранспортировке в режиме с подбрасыванием.* Известия АН СССР Механика и Машиностроение 1964 № 6.
3. А. К. Гулбе, Э. Э. Лавендел, *Условия существования и устойчивости движения детали с подбрасыванием по вибролотку при одновременном действии сил сухого и вязкого трения.* Вопросы динамики и прочности, 16 Рига 1968.
4. Д. А. Плисс, *К теории вибрационной сепарации.* Инжинерный журнал. Механика твердого тела. 1967. № 4.
5. Б. И. Крюков, *Динамика вибрационных машин резонансного типа.* Киев 1967.
6. K. Kuphal: Uber die Beeinflussung von Schwingungen durch einen Stosskörper II das Vertikal-System. ZAMM, Band 45, 1965, Heft 6.
7. F. Peterka: Periodické kmitáni mecahnické soustavy s vnitřnimi rázy. Stroinicky časopis Nr. 1965.
8. Gh. Silaș, L. Brîndeu, A. Hegedüs: Mișcări periodice cu ciocniri ale vibratorului liber. Bul. Științific și Tehnic al Institului Politehnic Timișoara. Seria nouă. Tom. 12 (26) Fasc. 1, 1967.
9. А. Е. Корбинский, *Механизмы с упругими связями. Динамика и прочность* Издательство «Наука». Москва. 1964.

ВИБРОУДАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ ВОЗБУЖДЕННОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАТФОРМОЙ

(РЕЗЮМЕ)

Платформа *ABC'D'* на рис. 1 совершает поступательное периодическое движение по данной закономерности возбуждая виброударные движения материальной частицы массы *m*. Частица свободно движется между двумя ударами в серце обладающей вязким сопротивлением. Соударение частицы с платформой мгновенно и характеризуется коэффициентами восстановления тангенциальных и нормальных скоростей λ,*R*. Такие виброударные системы имеют место при вибротранспорте.

Рассматриваются периодические движения частицы повторяющиеся с одной и той же скоростью соударения и имея период равный кратному периоду движения платформы. Определяются парамметры этих движений (15)—(18). Рассматривается устойчивость периодических движений методом возбуждений, установив условия устойчивости (30), (31).

Исследуются некоторые частные случаи подтверждающие известные результаты. Для гармонических возбуждений устанавливаются области периодических устойчивых движений с периодом равным периоду возбуждений (рис. 2), и соответственно удвоенному (рис. 3).

LES MOUVEMENTS VIBROPERCUTANTS DE LA PARTICULE MATÉRIELLE EXCITÉE PAR UNE PLATE-FORME MOBILE

(RÉSUMÉ)

La plate-forme $ABC'D'$ de la figure 1 exécute un mouvement de translation périodique après une loi connue excitant les mouvements vibropercutants d'une particule matérielle de masse m. Elle s'agite librement entre les collisions dans un milieu résistant, la force de résistance étant de nature gluante. La collision entre la particule est la plate-forme on considére instantanée et se caractérise par les coefficients de rétablissement des vitesses tangentielles λ et normales R. Tels des systèmes vibropercutants apparaîssent comme c'est le cas aux vibrotransporteurs. On étudie les mouvements périodiques de la particule qui se répétent avec la même vitesse de collision ayant la période égale avec un multiple de la période du mouvement de la plate-forme et on détermine les paramètres des ces mouvements (15)--(18). De même on étudie la stabilité des mouvements périodiques par la méthode des perturbations déterminant les conditions de la stabilité (30), (31). On recherche quelques cas particuliers retrouvant quelques-uns résultats connus. Pour le cas d'éxcitation armonique on détermine effectivement les domaines des mouvements périodiques stables ayant la période égale avec la période d'excitation fig. 2) et respectivement le double à la période d'excitation (fig. 3).

EINE WELLENGLEICHUNG SCHRÖDINGER' SCHER ART MIT ABLEITUNGEN HÖHERER ORDNUNG

VON

M. BORNEAS

In einer Reihe von Arbeiten haben verschiedene Autoren den Grundformalismus einer „Generalisierten Mechanik" mit Ableitungen höherer Ordnung [1], [2], [3], [4] und [5], sowie jenen einer Feldtheorie mit Ableitungen höherer Ordnung [6], [7], [8] und [4] entwickelt. Die vorliegende Arbeit versucht nun, auf Grund dieser Ideen, eine Wellengleichung der Art Schrödingergleichung mit Ableitungen höherer Ordnung zu erhalten.

Man erhält die nichtrelativistische Schrödingergleichung für einen freien Massenpunkt, indem man die Lagrangefunktion [10]

$$L=\frac{M}{2}\sum_k \dot{q}_k^2 \tag{1}$$

nimmt, (wo mit M die Masse bezeichnet wird), und mit deren Hilfe die Hamiltonfunktion beschrieben werden kann

$$H=\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L=\sum_k \frac{M}{2}\dot{q}_k^2 \tag{2}$$

die, wenn man den Impuls

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=M\dot{q}_k \tag{3}$$

in Betracht zieht, auch unter folgender Form

$$H=\sum_k \frac{p_k^2}{2M} \tag{4}$$

erscheinen kann.

Führt man nun für p_k den Ausdruck

$$p_k \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_k} \tag{5}$$

ein, so gelangt man zur Schrödingergleichung für die freie Bewegung.

Um eine Wellengleichung mit Ableitungen höherer Ordnung zu erhalten, werden wir, analog dem weiter oben beschriebenen Gedankengang, der Art beginnen, dass wir die, in Ableitungen quadratische Lagrangefunktion (1) wie folgt

$$\mathfrak{L}=\sum_k\left[\sum_{m=1}^{s} C_m\,(q_k^{(m)})^2+\sum_{a=1}^{s}\sum_{b=1}^{s} C_{a,b}q_k^{(a)}q_k^{(b)}\right] \tag{6}$$

entwickeln, (mit $a\neq b$), wo s die höchste Ordnung der Ableitungen und C_m bzw. $C_{a,b}$ Konstanten darstellen. Anschliessend drücken wir dann jene Funktion aus, die H für Ableitungen höherer Ordnung verallgemeinert [1].

$$\mathcal{H}=\sum_k\sum_{n=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-n}(-1)^j\left(\frac{d^j}{dt^j}\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_k^{(n+j)}}\right)q_k^{(n)}-\mathfrak{L}. \tag{7}$$

Ziehen wir (6) in Betracht, so können wir analog zu Gleichung (2):

$$\mathcal{H}=\sum_k\sum_{n=1}^{s}\left\{C_n(q_k^{(n)})^2+\sum_{m=1}^{s}C_{n,m}q_k^{(m)}q_k^{(n)}+\sum_{j=1}^{s-n}(-1)^j\left[2C_{n+j}q_k^{(n+2j)}q_k^{(n)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{m=1}^{s}(C_{m,n+j}+C_{n+j,m})\,q_k^{(m+j)}q_k^{(n)}\right]\right\} \tag{8}$$

schreiben. Diese Funktion kann jedoch nicht mit Hilfe der kanonisch konjugierten Impulse mit Ableitungen höherer Ordnung [1]

$$p_{k/n}=\sum_{j=0}^{s-n}(-1)^j\,\frac{d^j}{dt^j}\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_k^{(n+j)}} \tag{9}$$

ausgedrückt werden, die eine komplizierte Form haben.

Andererseits haben Hayes und Jankowski [11] darauf hingewiesen, dass die von Krüger und Callebaut [3] vorgeschlagene Schreibweise

$$p_{k/n}\rightarrow -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial q_k^{(n-1)}} \tag{10}$$

nicht entsprechend sei. Dies ist darauf zurückzuführen, dass es mehrere Lagrangefunkionen verschiedener Ordnung gibt, die zu denselben Bewegungse gleichungen und derselben Hamiltonfunkion führen, die aber verschiedenkanonish konjugierte Impulse ergeben.

Es bestehen daher zwei gut begründete Ursachen, warum der Operator

$$-i\hbar\,\frac{\partial}{\partial q_k^{(n-1)}} \tag{11}$$

nicht durch die Substitution des Wertes $p_{k/n}$ eingeführt werden kann. Wir werden also eine andere Grösse suchen, welche die oben erwähnten Unzulänglichkeiten nicht aufweist und die sich, durch Elimination der Ableitungen höherer Ordnung, zum schon bekannten Impuls $M\dot{q}_{k/n}$ reduziert.

Hierfür müssen wir vorerst feststellen, dass es auch in der klassischen Mechanik mehrere Lagrangefunktionen gibt, die zu denselben Bewegungsgleichungen und derselben Hamiltonfunktion, nicht aber zu demselben kanonisch konjugierten Impuls führen. Es ist bekannt, dass alle Lagrangefunktionen, die sich durch df/dt unterscheiden, diese Bedingungen erfüllen. Jedoch ist für all diese Lagrangefunktionen der Bewegungsimpuls der gleiche und zwar $M\dot{q}_k$.

Wenn man in Betracht zieht, dass bei der freien Bewegung die Beziehung

$$\frac{M}{2}\sum_k \dot{q}_k^2 = E \tag{12}$$

gilt, wo E die Energie darstellt, ersieht man, dass der Bewegungsimpuls auch aus

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} = M\dot{q}_k \tag{13}$$

erhalten werden kann.

Mit (2) und (12) können wir dann

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} = \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k \tag{14}$$

und

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{q}_k^2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{15}$$

schreiben, wo die partielle Ableitung zweiter Ordnung des Ausdruckes $\partial L/\partial \dot{q}_k$ gleich Null ist. Aus (14) und (15) erhalten wir dann

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \int_0^{\dot{q}_k} d\dot{q}_k \frac{1}{\dot{q}_k}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} + F_1 \text{ (unabhängig von } \dot{q}_k) \tag{16}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \int_0^{\dot{q}_k} d\dot{q}_k \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{q}_k^2} + F_2 \text{ (unabhängig von } \dot{q}_k). \tag{17}$$

Beide Gleichungen drücken den Bewegungsimpuls $M\dot{q}_k$ aus.

Wir werden nun diese Ergebnisse auf den Fall der Ableitungen höherer Ordnung übertragen. In [4] wurde gezeigt, dass der Invarianz der Funktion $\mathfrak{L}$ bei zeitlichen Verschiebungen eine Konservierung der Funktion $\mathfrak{K}$ entspricht, und wir also schreiben könen

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{S}, \tag{18}$$

$\mathfrak{E}$ bedeutet in diesem Falle die Energie. Nach (8) erhalten wir dann, analog zu (14) und (15), die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q_k^{(r)}} = \sum_{n=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial q_k^{(r)}}\sum_{j=0}^{s-n}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k^{(n+j)}}\right)q_k^{(n)} + \sum_{j=0}^{s-r}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k^{(r+j)}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k^{(r)}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial q_k^{(r)}}p_{k/n}\right)q_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{s-r}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k^{(r+j)}} \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial q_k^{(r)2}} = \frac{\partial}{\partial q_k^{(r)}}p_{k/r} + \frac{\partial}{\partial q_k^{(r)}}\sum_{j=1}^{s-r}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k^{(r+j)}}. \tag{20}$$

Gleichung (20) erlaubt uns, den Impuls $p_{k/r}$ auszudrücken (die anderen wurden eliminiert), so dass

$$p_{k/r} = \int_0^{q_k^{(r)}} dq_k^{(r)}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial q_k^{(r)2}} - \sum_{j=1}^{s-r}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k^{(r+j)}} + F \text{ (unabhängig von } q_k^{(r)}) \tag{21}$$

gilt.

Für $\mathcal{H}=H$ ist deutlich ersichtlich, dass der Bewegungsimpuls $M\dot{q}_k$ durch das Integral aus (21) ausgedrückt wird, wenn $r=1$ ist. Daher besteht $p_{k/r}$ aus der, durch das Integral

$$P_{k/r} = \int_0^{q_k^{(r)}} dq_k^{(r)}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial q_k^{(r)2}} \tag{22}$$

ausgedrückten Grösse, die sich zum Bewegungsmoment $M\dot{q}_k$ reduziert, sowie den anderen vorhandenen Termen.

Die Grösse $P_{k/r}$, die wir *reduzierten Impuls* nennen können, erfüllt, ausser der Bedingung, dass sie sich zum Bewegungsimpuls $M\dot{q}_k$ reduziert, noch andere zwei äusserst wichtige Bedingungen: sie kann aus der Energie berechnet werden, leidet demnach nicht unter der von Hayes und Jankowski [11] erwähnten Unzulänglichkeit und besitzt für $\mathcal{H}$ einen Ausdruck von expliziter Form, kann also durch einen Ableitungsoperator substituiert werden.

Dieses in Betracht ziehend, können wir anstatt $P_{k/r}$ den Ausdruck

$$P_{k/r} \to -it\hbar\frac{\partial}{\partial q_k^{(r-1)}} \tag{23}$$

einführen.

Aus (22) können wir sofort $P_{k/r}$ berechnen und mit (18) und (8) erhalten wir dann

$$P_{k/r} = 2C_r q_k^{(r)}. \tag{24}$$

Änlich wie wird den Hamilton opetaror für die Schrödingergleichung zu erhalten [10], können wir nun auch verfahren. Zuerst die Hamiltonfunktion durch, in unserem Falle, reduzierte Impulse ausdrücken. Dann substituieren

wir in (8) die Ableitungen $q_k^{(r)}$, für welche $r \ll s$, also $n+2j \ll s$ und $m+j \ll s$ gilt, und erhalten

$$\mathcal{H} = \sum_k \sum_{n=1}^{s} \Bigg[\frac{1}{4C_n} P_{k|n}^2 + \sum_{m=1}^{s} \frac{C_{n,m}}{4C_n C_m} P_{k|n} P_{k|m} + \\ + \sum_{j=1}^{(s-n)/2} (-1)^j \frac{C_{n+j}}{2C_n C_{n+2j}} P_{k|n} P_{k|n+2j} + \\ + \sum_{m=1}^{s} \sum_{j=1}^{s-m} (-1)^j \frac{C_{m,n+j} + C_{n+j,m}}{4C_n C_{m+j}} P_{k|n} P_{k|m+j} + \\ + \sum_{j=(s-n+2)/2}^{s-n} (-1)^j \frac{C_{n+j}}{C_n} q_k^{(n+2j)} P_{k|n} + \\ + \sum_{m=1}^{s} \sum_{j=s-m+1}^{s-n} (-1)^j \frac{C_{m,n+j} + C_{n+j,m}}{2C_n} q_k^{(m+j)} P_{k|n} \Bigg]. \tag{25}$$

Wenn wir nun die Operatoren entsprechend Gleichung (23) einführen, erhalten wir einen quantifizierten Hamiltonoperator. Nun fügen wir nach der bekannten Weise [10], den Operator der potentiellen Energie U hinzu und können dann, durch Anwendung an eine Wellenfunktion

$$-\frac{\hbar^2}{2} \sum_k \sum_{n=1}^{s} \Bigg(\frac{1}{2C_n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k^{(n-1)2}} + \sum_{m=1}^{s} \frac{C_{n,m}}{2C_n C_m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k^{(n-1)} \partial q_k^{(m-1)}} + \\ + \sum_{j=1}^{(s-n)/2} (-1)^j \frac{C_{n+j}}{C_n C_{n+2j}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k^{(n-1)} \partial q_k^{(n+2j-1)}} + \\ + \sum_{m=1}^{s} \sum_{j=1}^{s-m} (-1)^j \frac{C_{m,n+j} + C_{n+j,m}}{2C_n C_{m+j}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k^{(n-1)} \partial q_k^{(m+j-1)}} \Bigg) + \\ - i\hbar \sum_k \sum_{n=1}^{s} \Bigg(\sum_{j=(s-n+2)/2}^{s-n} (-1)^j \frac{C_{n+j}}{C_n} q_k^{(n+2j)} + \\ + \sum_{m=1}^{s} \sum_{j=s-m+1}^{s-n} (-1)^j \frac{C_{m,n+j} + C_{n+j,m}}{2C_n} q_k^{(m+j)} \Bigg) \frac{\partial \psi}{\partial q_k^{(n-1)}} + U\psi = \mathcal{E}\psi \tag{26}$$

schreiben. Dies ist eine nichtrelativistiche Wellengleichung mit Ableitungen höherer Ordnung. Für $C_{a,b}=0$ und $C_m=(M/2)\,\delta_{1m}$ wird sie zur bekannten Schrödingergleichung reduziert.

Da $P_{k|r}$ nur einen Teil des kanonisch konjugierten Allgemeinimpulses darstellt, können wir nicht erwarten, dass er mit dem Hamiltonoperator der Gleichung (26) kommutiert.

Als Abschluss nehmen wir ein einfaches Beispiel für Gleichung (26). Die Lagrangefunktion sei

$$\mathfrak{L}=\frac{M}{2}\dot{q}^2+\frac{\mu}{2}\ddot{q}^2 \tag{27}$$

(wo μ eine Konstante ist). Sie führt zur Wellengleichung

$$-\frac{\hbar^2}{M2}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial\dot{q}^2}+i\hbar\frac{\mu}{M}\dddot{q}\frac{\partial\psi}{\partial q}=\mathfrak{E}\psi \tag{28}$$

mit der Lösung

$$\psi=A\exp\left(iBq\pm\sqrt{\frac{\hbar^2\mu B^2+2\hbar^2\mu^2\ddot{B}q-2M\mu\mathfrak{E}}{\hbar^2M}}\,\dot{q}\right) \tag{29}$$

wo A und B von q unabhängig sind und willkürliche Werte haben. Mit $B=\sqrt{2M\mathfrak{E}}/\hbar$ und $\mu=0$ bildet die Lösung (29), wenn sie mit dem zeitlichen Faktor multipliziert wird, die bekannte harmonische Welle.

Ich möchte Frau Dr. Ligia M.C.S. Rodrigues für den Meinungsaustausch danken, der mir von reellem Nutzen war.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Borneas, Am. J. Phys., *27*, 265, 1959.
2. J. Koestler şi J. Smith, Am. J. Phys., *33*, 140, 1965.
3. J. Krüger şi D. Callebaut, Am. J. Phys., *36*. 557, 1968.
4. M. Borneas, Phys. Rev., 186, 1299, 1969.
5. L. Coelho de Souza şi P. Rodrigues (preprint).
6. M. Borneas, Nuovo Cim. *16*, 806, 1960.
7. M. Borneas, Bul. şt. tehn. I.P.T., *6* (*20*), 39, 1961.
8. M. Borneas, Acta Phys. Polon., *24*, 471, 1963.
9. L. Coelho de Souza şi P. Rodrigues, Journ. Phys. A (Gen. Phys.), *2*, 304, 1969.
10. E. V. Spolski, *Fizica Atomică*, Ed. Tehnică (1952—53).
11. C. Hayes şi J. Jankowski, Nuovo Cim., *58* B, 494, 1968.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ШРЕДИНГЕР С ПРОИЗВОДЫМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

(РЕЗЮМЕ)

Исходя из функции Лагранжа с производными высшего порядка, получается соответствующая функция Гамильтона. Выписывается канонический сопряженный импульс в виде суммы между приведенным импульсом, расчитанным из энергии и другими членами. Функция Гамильтона выражается приведенными импульсами, которые в пределе пре-

вращаются в известные импульсы движения. Заменяя эти приведенные импульсы производными операторами — $i\hbar\partial / \partial q_k^{(n)}$ получается квантифицированный гамильтониян который, примененный к волновой функции, приводит к волновому уравнению с высшими производными.

Приводится пример :

O ECUAȚIE ONDULATORIE DE TIP SCHRÖDINGER CU DERIVATE SUPERIOARE

(REZUMAT)

Pornind de la o funcție Lagrange cu derivate superioare se află funcția lui Hamilton corespunzătoare. Se scrie impulsul canonic conjugat ca suma dintre un impuls redus – calculat din energie – și alți termeni. Se exprimă funcția lui Hamilton prin impulsurile reduse, care la limită devin impulsurile de mișcare cunoscute. Înlocuindu-se aceste impulsuri reduse prin operatorii de derivare $-i\hbar\partial/\partial q_k^{(n)}$ se obține un hamiltonian cuantificat, care aplicat funcției de undă conduce la o ecuație ondulatorie cu derivate superioare. Se dă un exemplu.

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC TIMIŞOARA

SERIA MATEMATICĂ–FIZICĂ–MECANICĂ TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 15 (29) Fascicola 2

IULIE—DECEMBRIE
1970

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. ing. *Gh. Silaș* (redactor șef), prof. ing. *Constantin Avram*, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr. ing. *I. Anton*, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr. ing. *M. Borneas*, prof. dr. ing. *M. Brașovan*, prof. ing. *V. Cocheci*, academician prof. dr. doc. *C. Drăgulescu*, prof. dr. *O. Em. Gheorghiu*, prof. ing. *V. Gheorghiu*, prof. ing. *Gh. Savii*, prof. ing. *D. Mateeescu*, prof. dr. ing. *I. Novac*.

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. *O. Em. Gheorghiu* (redactor responsabil), prof. dr. ing. *M. Borneas* (redactor responsabil adjunct), prof. ing. *Gh. Silaș*, conf. dr. *B. Cristici*, conf. dr. *C. Simoiu*, conf. dr. ing. *I. Groșanu* și conf. dr. ing. *L. Brîndeu* (secretar de redacție).

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ — FIZICĂ — MECANICĂ TEORETICĂ ȘI APLICATĂ

Tomul 15 (29) Fasc. 2 Iulie-Decembrie 1970

SUMAR

MANILAL SHAH : Asupra cîtorva relații cuprinzînd polinoamele Sister Celine generalizate 103

B. CRSTICI, MARIA KISS-MEDNYANSKI, ȘT. MATEI : Asupra funcțiilor reale de tip cosinus definite pe un grup 115

T. DORDEA : Metodă de efectuare a integralei eliptice, pline, de speța III-a cu parametru complex 121

N. NEUHAUS : Funcții ciclice și sisteme diferențiale liniare asociate la algebre de ordin finit 129

M. BORNEAS : Tranziții cuatice produse de cîmpuri suprapuse 143

COLETTE DE SABATA, I. MIHALCA, DOROTHEIA MIHAILOVICI, M. CHIVU : Asupra dependenței dintre structura magnetică și valorile parametrilor macroscopici la pături subțiri de Ni—Co 147

V. M. SOUNDALGEKAR, V. G. DIVEKAR : Mișcarea laminară în lungul unei conducte de secțiune circulară uniformă cu alunecare și absorbție mică la perete 155

GH. SILAȘ, L. BRÎNDEU : Stabilitatea mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu două grade de libertate 167

GH. SILAȘ, I. GROȘANU : Oscilațiile unui sistem mecanic acționat de un motor electric avînd puterea limitată 173

DOINA BECHERESCU : Asupra mișcării cu salturi ale unei particule pe o platformă vibrantă acționată de un generator de vibrații 179

I. GROȘANU : Oscilațiile unui vibrator inerțial acționat de un motor electric 189

T. GLIGOR, C. URSU, D. UROȘU : Influența unor parametrii ai suspensiei elastice asupra vibrațiilor laterale la locomotive Diesel-electrice 0-6-0 DA 197

BULLETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE DE TIMIȘOARA
SERIE MATHÉMATIQUE — PHYSIQUE — MÉCANIQUE THÉORIQUE
ET APPLIQUEÉ
Tom 15. (29) Fasc. 2 Juillet—Decembre 1970

SOMMAIRE

MANILAL SHAH : On some relations involving generalized Sister Celine's polynomials 103

B. CRSTICI. MARIA KISS-MENDYANSZKY, ȘT. MATEI : About real functions of the cosine type defined on a group 115

. DORDEA : Methode zur Lèsung der vollständigen alliptischen Integrale, dritter Gattung, mit komplexem Parameter 121

N. NEUHAUS : Über zyklische Funktionen und lineare Differentialsysteme die Algebren endlichen Ranges zugeordnet sind 129

M. BORNEAS : Quantum transitions caused by superimposed fields 143

COLETTE DE SABATA, I. MIHALCA, DOROTHEIA MIHAILOVICI, M. CHIVU : Die Abhängigkeit der magnetischen Struktur von den Werten der makroskopischen Parameter bei elektrolytischen Ni—Co — Schichten 147

V. M. SOUNDALGEKAR, V. G. DIVEKAR : Laminar slip-flow through a uniform circular pipe with small section 155

GH. SILAȘ, L. BRÎNDEU : The stability of periodic motions of a shockvibration system with two degree of freedom 167

GH. SILAȘ, I. GROȘANU : Die Schwingungen eines mechanischen Verbandes, welcher mit einem elektrischen Motor mit begrenzter Leistung angetrieben wird 173

DOINA BECHERESCU : Über die Wurfbewegung eines Punktes auf einer schwingenden Plattform 179

I.GROȘANU : Die Schwingungen eines unwuchterregten Verbandes welcher mit einem elektrischen Motor angetrieben wird ... 189

T. GLIGOR, C. URSU, D. UROSU : Der Einfluss einiger Parameter der elastischen Lagerung auf die horizontalen Schwingungen der Dieselelektrischen-Lokomotive 0-6-0 DA 197

ON SOME RELATIONS INVOLING GENERALIZED SISTER CELINE'S POLYNOMIALS

By

MANILAL SHAH

Department of Mathematics,
P.M.B.G. College, Sanyogitaganj, *Indore* (M.P.), India

1. INTRODUCTION

The author has defined the generalized hypergeometric polynomial [[8], p. 79, eqn. (2.1)] in the form

$$F_n(x)=x^{(m-1)n}\ {}_{p+m}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(m,\ -n),\ a_1,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ \lambda x^{\mu}\right] \tag{1.1}$$

where m and n are positive integers and the symbol $\Delta(m,\ -n)$ represents the set of m-parameters:

$$\frac{-n}{m},\ \frac{-n+1}{m},\ \ldots,\ \frac{-n+m+1}{n}.$$

The polynomial is in a more generalized form which yields many known polynomials on specializing the parameters.

For brevity and ease in writing, we shall employ the contracted notation.

$${}_pF_q(x)={}_pF_q\left(\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\middle|\ x\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a_p)_r x^r}{(b_q)_r\, r!}$$

where $(a_p)_r$ is to be interpreted as $\prod_{j=1}^{p}(a_j)_r$ and similarly for $(b_q)_r$.

The polynomial (1.1) with $m=1$ reduces to

$$F_n(x)={}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,\ a_1,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ \lambda x^{\mu}\right] \tag{1.2}$$

of degree n.

Particular cases of (1.2) :

(a) Setting $\lambda=\mu=1$ and with proper choice of parameters, we have

$$F_n(x)={}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n, & n+\alpha+\beta+1, & a_2, \ldots, a_p \\ 1+\alpha, & 1/2, & b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; \; x\right]=$$

$$=\frac{n!}{(1+\alpha)_n}f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; \; x\right) \tag{1.3}$$

a generalized Sister Celine's polynomial [[8], p. 80, eqn. (2.2)] which reduces to Sister Celine's polynomial [[1], p. 806, eqn. (1)] if $\alpha=\beta=0$.

Special cases of (1.3) :

With $p=q=3$, $a_2=1/2$, $a_3=\xi$, $b_3=p$, we obtain

$$F_n(x)={}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, & n+\alpha+\beta+1, & \xi \\ & 1+\alpha, & p\end{matrix}; \; x\right]=\frac{n!}{(1+\alpha)_n}H_n^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, x) \tag{1.4}$$

a generalized Rice's polynomial [[4], p. 158, eqn. (2.3)] which reduces to Rice's polynomial $H_n(\xi, p, x)$ [[7], p. 108] when $\alpha=\beta=0$.

Further setting $\xi=p$ in (1.4), we get

$$F_n(x)={}_2F_1\left[\begin{matrix}-n, & n+\alpha+\beta+1 \\ & 1+\alpha\end{matrix}; \; x\right]=\frac{n!}{(1+\alpha)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x) \tag{1.5}$$

a Jacobi polynomial which can be reduced to Gegenbauer Legendre or Tchebicheff polynomials by particular choice of parameters.

(b) Substituting $p=1$, $q=0$, $a_1=n+a-1$, $\lambda=-\frac{1}{b}$, we have

$$F_n(x)={}_2F_0\left[\begin{matrix}-n, & a-1+n \\ & -\end{matrix}; \; -\frac{1}{b}x\right]=y_n(x, a, b) \tag{1.6}$$

a generalized Bessel polynomial.

The generalized Bessel polynomials $y_n(x, a, b)$ were introduced by Krall and Frink [3] as the polynomial solution of the differential equation.

$$x^2y''(x)+(ax+b)y'(x)=n(n+a-1)y(x), \tag{1.7}$$

where n is a positive integer and a and b arbitrary parameters. The simple Bessel polynomial is the special case $a=b=2$ and is represented by $y_n(x)$.

The object of this paper is to obtain the generating functions for the polynomial (1.2), generalized Sister Celine's and generalized Bessel polynomials. Certain differential recurrence relations for generalized Sister Celine's polynomials have been established with the help of the generating function. Many known new and very interesting cases have also mentioned. Therefore, the results obtained in this paper are of general character.

2. GENERATING FUNCTIONS

Consider the polynomial (1.2) with $a_1=c+n$,

$$\sigma_n(x)={}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,\ c+n,\ a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ \lambda x^{\mu}\right]. \tag{2.1}$$

We shall obtain the generating function relation

$$(1-t)^{-c}\ {}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}c,\ \frac{1}{2}c+\frac{1}{2},\ a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ \frac{-4\lambda x^{\mu}t}{(1-t)^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_n(x)\,(c)_n t^n}{n!}. \tag{2.2}$$

Proof :

We find that

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_n(x)\,(c)_n t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,(c+n)_k\,(c)_n\,(a_2)_k\ldots(a_p)_k\,\lambda^k x^{\mu k} t^n}{(b_1)_k\,(b_2)_k\ldots(b_q)_k\,k!\,n!}\cdot$$

$$\left[\begin{matrix}\text{On using the relations } (a)_k\,(a+k)_n=(a)_{n+k} \text{ and}\\ (\alpha)_{n-k}=-\frac{(-1)^k\,(\alpha)_n}{(1-\alpha-n)_k},\ \text{for } 0\leqslant k\leqslant n, \text{ we have}\end{matrix}\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(c)_{n+k}\,(a_2)_k\ldots(a_p)_k\,(-1)^k\lambda^k x^{\mu k} t^n}{(b_1)_k\,(b_2)_k\ldots(b_q)_k\,k!\,(n-k)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_{n+2k}\,(a_2)_k\ldots(a_p)_k\,(-1)^k\lambda^k x^{\mu k} t^{n+k}}{(b_1)_k\,(b_2)_k\ldots(b_q)_k\,k!\,n!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c+2k)_n t^n\,(c_2)_k\,(a_2)_k\ldots(a_p)_k\,(-1)^k\,\lambda^k x^{\mu k} t^k}{n!\,(b_1)_k\,(b_2)_k\ldots(b_q)_k\,k!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_{2k}\,(a_2)_k\ldots(a_p)_k\,(-1)^k\,\lambda^k x^{\mu k} t^k}{(b_1)_k\,(\ \ )_k\ldots(b_q)_k\,k!\,(1-t)^{c+2k}}=$$

$$=(1-t)^{-c}\ {}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}c,\ \frac{1}{2}c+\frac{1}{2},\ a_2,\ \ldots,\ a_p;\\ b_1,\ \ldots,\ b_q;\end{matrix}\ \frac{-4x^{\mu}t\lambda}{(1-t)^2}\right]$$

which completes the derivation of equation (2.2).

Particular cases of (2.2) :

(a) Setting $\mu=1$ and $\lambda=-1$, we obtain a known generating function relation for Bessel polynomials given by Rainville [[5], p. 106, eqn. (6)].

(b) Substituting $\lambda=\mu=1$, $c=1+\alpha+\beta$, $b_1=1+\alpha$, $b_2=\frac{1}{2}$, we obtain

$$(1-t)^{-1-\alpha-\beta}\ {}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1), & \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2), & a_2, \ldots, a_p \\ 1+\alpha, & \frac{1}{2}, & b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; -\frac{4xt}{(1-t)^2}\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n}f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)t^n \qquad (2.3)$$

a generating function for the generalized Sister Celine's polynomial.

Special cases of (2.3) :

(I). Taking $\alpha=\beta=0$, we obtain a known generating function relation [[6], p. 290, § 149, eqn. (1)] for Sister Celine's polynomials.

(II). With $p=q=3$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\xi$, $b_3=p$, we obtain a known generating function relation [[4], p. 159, eqn. (4.2)] :

$$(1-t)^{-1-\alpha-\beta}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(1+\alpha+\beta), & \frac{1}{2}(2+\alpha+\beta), & \xi \\ 1+\alpha, & p\end{matrix}; -\frac{4vt}{(1-t)^2}\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n}H_n^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, v)\,t^n. \qquad (2.4)$$

This reduces to another known generating function relation [[6], p. 288, eqn. (4)] for Rice's polynomial $H_n(\xi, p, v)$ when $\alpha=\beta=0$.

Further setting $\xi=p$ and $v=\left(\frac{1-v}{2}\right)$ in (2.4), we have another known relation of generating function [[6], p. 256, eqn. (10)] for Jacobi polynomial $P_n^{(\alpha,\beta)}(v)$.

(c) Setting $p=1$, $q=0$, $c=a-1$, $\mu=1$, $\lambda=-\frac{1}{b}$, we obtain

$$(1-t)^{-(a-1)}\ {}_2F_0\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(a-1), & \frac{1}{2}a \\ -\end{matrix}; \frac{4xt}{b(1-t)^2}\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)_n}{n!}y_n(x, a, b)t^n. \qquad (2.5)$$

This is the generating function relation for the generalized Bessel polynomials $y_n(x, a, b)$ which reduces to a known relation [[2], p. 329, eqn. (4.2] :

$$(1-t)^{-1}\ {}_2F_0\left[1, \frac{1}{2}; -; \frac{2xt}{(1-t)^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x)\,t^n$$

of the generating function for the simple Bessel polynomials $y_n(x)$ when $a=b=2$.

3. DIFFERENTIAL RECURRENCE RELATIONS

A number of differential recurrence relations exist for the generalized Sister Celine's polynomials $f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)$:

$$x\left[(\alpha+\beta+n)\, Df_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)+(\alpha+n)\, Df_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)\right]=$$

$$=(\alpha+\beta+n)\left[nf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)-(\alpha+n)\, f_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)\right] \quad (3.1)$$

where $D=d/dx$, and $n\geqslant 1$.

$$\left[xDf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)-nf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)\right]=$$

$$=\frac{-(1+\alpha)_n}{(1+\alpha+\beta)_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k}\left\{(1+\alpha+\beta)f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2xDf_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)\right\}\right] \quad (3.2)$$

for $n\geqslant 1$.

$$xDf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)-nf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)=$$

$$=\frac{(1+\alpha)_n}{(1+\alpha+\beta)_n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(1+\alpha+\beta+2k)\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k}\; f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) \quad (3.3)$$

valid for $n\geqslant 1$.

Proof :

In order to derive (3.1), (3.2) and (3.3), we start with

$$F=(1-t)^{-1-\alpha-\beta}\Phi\left[\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right] \quad (3.4)$$

where

$$\Phi\left[\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right]={}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1), & \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2), & a_2, \ldots, a_p \\ 1+\alpha, & \frac{1}{2}, & b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; \frac{-4xt}{(1-t)^2}\right]$$

and

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n}f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)t^n.$$

Then

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4t\,(1-t)^{-3-\alpha-\beta}\Phi'\left[\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right] \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (1+\alpha+\beta)\,(1-t)^{-2-\alpha-\beta}\Phi\left[\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right] - 4x\,(1+t)\,(1-t)^{-4-\alpha-\beta}\Phi'\left[\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right]. \tag{3.6}$$

Therefore F satisfies the partial differential equation:

$$x\,(1+t)\frac{\partial F}{\partial x} - t\,(1-t)\frac{\partial F}{\partial t} = -(1+\alpha+\beta)\,tF. \tag{3.7}$$

Equation (3.7) can be reduced to the following forms

$$x\frac{\partial F}{\partial x} - t\frac{\partial F}{\partial t} = -(1+\alpha+\beta)\,tF - t^2\frac{\partial F}{\partial t} - xt\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{3.8}$$

$$x\frac{\partial F}{\partial x} - t\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{(1+\alpha+\beta)\,t}{(1-t)}F - \frac{2xt}{(1-t)}\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{3.9}$$

$$x\frac{\partial F}{\partial x} - t\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{(1+\alpha+\beta)\,t}{(1+t)}F - \frac{2t^2}{(1+t)}\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{3.10}$$

Since we have

$$F = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n} f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)t^n,$$

equation (3.8) yields

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n}\left\{xDf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) - nf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)\right\}t^n =$$

$$= -(1+\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n} f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)t^{n+1} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n} f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n} \times$$

$$\times xDf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)t^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+\beta+n)\frac{(1+\alpha+\beta)_{n-1}}{(1+\alpha)_{n-1}} f_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)t^n -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_{n-1}}{(1+\alpha)_{n-1}} xDf_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)t^n$$

which leads to (3.1).

Equation (3.9) yields

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n}\left\{xDf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) - nf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)\right\}t^n =$$

$$=-(1+\alpha+\beta)\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n} f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^n\right) -$$

$$-2x\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n} Df_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^n\right) =$$

$$=-(1+\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}(a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^{n+k+1} -$$

$$-2x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} Df_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^{n+k+1} =$$

$$=-(1+\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^{n+1} -$$

$$-2x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} Df_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^{n+1} =$$

$$=-(1+\alpha+\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^{n} -$$

$$-2x\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} Df_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^{n}$$

which leads to (3.2).

From (3.10) we obtain

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n}\left\{xDf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) - nf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)\right\} t^n =$$

$$=-(1+\alpha+\beta)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\, t^{n+1}\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n} f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^n\right\} -$$

$$-2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{n+1}\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n} nf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^n\right\} =$$

$$=-(1+\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^{n+k+1} -$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} kf_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^{n+k+1} =$$

$$=-(1+\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) t^{n+1} -$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k\,\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k}\,f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ x\right)t^{n+1}=$$

$$=(1+\alpha+\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k}\,f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ x\right)t^n+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\ k\,\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k}\,f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ x\right)t^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\{(\alpha+\beta+2k+1\}(-1)^{n-k}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k}\,f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ x\right)t^n$$

which leads to (3.3).

4. EXPANSION OF x^n

We already know that any polynomial can be expanded in a series of the polynomials merely because they form a simple set.

The expansion of x^n in a series of generalized Sister Celine's polynomials is useful.

Consider

$$_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1),\ \ \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2),\ \ a_2,\ \ldots,\ a_p\\ 1+\alpha,\ \ \frac{1}{2},\ \ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ -\frac{4xt}{(1-t)^2}\right]=$$

$$=(1-t)^{1+\alpha+\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k}\,f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ x\right)t^k. \qquad (4.1)$$

Next, in (4.1) put

$$\frac{-4t}{(1-t)^2}=v.$$

Then $t=1-\dfrac{2}{1+\sqrt{1-v}}=\dfrac{-v}{(1+\sqrt{1-v})^2}$ and (4.1) becomes

$$_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1),\ \ \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2),\ \ a_2,\ \ldots,\ a_p\\ 1+\alpha,\ \ \frac{1}{2},\ \ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ vx\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k}\,\frac{(-1)^k v^k}{2^{2k}}\,f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ x\right)\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-v}}\right)^{1+\alpha+\beta+2k}. \qquad (4.2)$$

By Ex. 10, p. 70 [(6)], we obtain

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-v}}\right)^{1+\alpha+\beta+2k} = {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2k+2), & \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2k+1) \\ 2+\alpha+\beta+2k\end{matrix}; v\right]$$

and replacing on the right hand side of (4.2), we have

$$ {}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1), & \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2), & a_2, \ldots, a_p \\ 1+\alpha, & \frac{1}{2}, & b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; vx\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} \frac{(-1)^k v^k}{2^{2k}} f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) \times$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2k+1), & \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2k+2) \\ 2+\alpha+\beta+2k\end{matrix}; v\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} \frac{(-1)^k v^k}{2^{2k}} f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) \times$$

$$\times \frac{\left[\frac{1}{2}[\alpha+\beta+2k+1]\right]_n \left[\frac{1}{2}[\alpha+\beta+2k+2]\right]_n v^n}{n!(\alpha+\beta+2k+2)_n}.$$

$$\left[\text{Making use of } (\alpha)_{2n} = 2^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n, \text{ we have}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} \frac{(-1)^k}{2^{2n+2k} n!} f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) \frac{(1+\alpha+\beta+2k)_{2n}}{(\alpha+\beta+2+2k)_n} v^{n+k}$$

$$\left[\text{With the help of } \frac{(1+\alpha+\beta+2k)_{2n}}{(2+\alpha+\beta+2k)_n} = \frac{(1+\alpha+\beta)_{2k+2n}(1+\alpha+\beta+2k)}{(1+\alpha+\beta)_{n+2k+1}}, \text{ we obtain}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} \frac{(-1)^k}{2^{2n+2k} n!} f_k^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right) \times$$

$$\times \frac{(1+\alpha+\beta)_{2k+2n}(1+\alpha+\beta+2k)\, v^{n+k}}{(1+\alpha+\beta)_{n+2k+1}}.$$

Therefore

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}[\alpha+\beta+1]\right]_n \left[\frac{1}{2}[\alpha+\beta+2]\right]_n (a_2)_n, \ldots, (a)_\rho)_n}{(1+\alpha)_n \left(\frac{1}{2}\right) (b_3)_n \ldots (b_q)_n\, n!} v^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} \frac{(-1)^k}{2^{2n}(n-k)!} f_k^{(\alpha,\beta)} \left(\begin{matrix} a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q \end{matrix}; x \right) \frac{(1+\alpha+\beta)_{2n}\,(1+\alpha+\beta+2k)}{(1+\alpha+\beta)_{n+2k+1}} v^n. \tag{4.3}$$

Now using the relation $(\alpha)_{n-k} = \frac{(-1)^k (\alpha)_n}{(1-\alpha-n)_k}$ for $0 \leqslant k \leqslant n$ and equating coefficients of v^n on both sides of (4.3), we get the expansion of x^n

$$x^n = \frac{(1+\alpha)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \prod_{j=3}^{q} (b_j)_n}{\prod_{j=2}^{p} (a_j)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\,(1+\alpha+\beta)_k\,(1+\alpha+\beta+2k)}{(1+\alpha)_k\,(1+\alpha+\beta)_{n+k+1}} \times$$

$$\times f_k^{(\alpha,\beta)} \left(\begin{matrix} a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q \end{matrix}; x \right). \tag{4.4}$$

5. PARTICULAR CASES OF (3.1), (3.2), (3.3) AND (4.4):

(a) Setting $\alpha=\beta=0$, we obtain all known relations [[6], p. 292, eqns. (13), (14), (15) and (12)] of Sister Celine's polynomials.

(b) Substituting $p=q=3$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\xi$, $b_3=p$, we have

(I). $v\,[(n+\alpha+\beta)\,DH_n^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, v)+(\alpha+n)\,DH_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, v)] =$

$(n+\alpha+\beta)\,[nH_n^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, v)-(\alpha+n)H_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, v)]$, $n \geqslant 1$.

(II). $vDH_n^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, v) - nH_n^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, v) =$

$$= \frac{-(1+\alpha)_n}{(1+\alpha+\beta)_n} \sum_{k=}^{n-1} \frac{(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} [(1+\alpha+\beta)\,H_k^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, v)+$$

$$+2vDH_k^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, \quad)], \quad n \geqslant 1.$$

(III). $vDH_n^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, v)-nH_n^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, \quad) =$

$$= \frac{(1+\alpha)_n}{(1+\alpha+\beta)_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\,(1+\alpha+\beta+2k)\,(1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k} H_k^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, v), \quad n \geqslant 1$$

and

$$\text{(IV)}.\ x^n = \frac{(1+\alpha)_n\,(p)_n}{(\xi)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\,(1+\alpha+\beta)_k\,(1+\alpha+\beta+2k)}{(1+\alpha)_k\,(1+\alpha+\beta)_{n+k+1}} H_k^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, x).$$

These are the known relations [[9], [10], eqns. (2.1), (2.2), (2.3) and (2.1)] given by the author for generalized Rice's polynomials.

Special cases of (b):

(A) With $\alpha=\beta=0$ in (I), (II), (III) and (IV), we obtain all known relations [[6], p. 288, eqns. (7), (9), (10) and (8) respectively] for Rice's polynomials $H_n(\xi, p, v)$.

(B) Taking $\xi = p$, $v = \left(\frac{1-x}{2}\right)$ and using

$$\frac{d}{dv}[P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2v)] = (-2)\frac{d}{dx}[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]$$

etc., we get all known relations [[6], p. 262, eqns. (3), (4), (5) and (2) respectively] for Jacobi polynomials $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Further on specializing the parameters in (B), we may obtain several interesting results for Gegenbauer, Legendre or Tchebicheff polynomials.

In conclusion, I wish to express my grateful thanks to Dr. V. K. Bhise for his help in the preparation of this paper.

REFERENCES

1. Sister M. Celine Fasenmyer, Some generalized hypergeometric polynomials. Bull., Amer. Math. Soc., 53 (1947), pp. 806—812.
2. Gould, H. W., A new series transform with applications to Bessel, Legendre, and Tchebycheff polynomials. Duke Mathematical Journal, Vol. 31, No. 2, pp. 325—334.
3. Krall, H. and Frink, O., A new class of orthogonal polynomials: the Bessel polynomial. Transactions of the American Mathematical Society Vol. 65, (1949), pp. 100—115.
4. Khandekar, P. R., On a generalization of Rice's polynomial-I. Proc. Nat. Acad. Sci. India, Sec. A, Vol. XXXIV, part. II (1964), pp. 157—162.
5. Rainville, E. D., Generating functions for Bessel and related polynomials. Canadian Jour. of Mathematics Vol. 5 (1953), pp. 104—106.
6. Rainville, E. D., *Special functions*, New York, 1960.
7. Rice, S. O., Some properties of ${}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, & n+1, & \xi \\ & 1, & p\end{matrix}; v\right)$. Duke Math. Journal, Vol. 6, (1960), pp. 108—119.
8. Shah Manilal, Certain integrals involving the product of two generalized hypergeometric polynomials. Proc. Nat. Acad. Sci., India, Sec. A, Vol, XXXVII part I (1967), pp. 79—96.
9. Shah, Manilal, On differential recurrence relations of generalized Rice's polynomials. Proc. Camb. Phil. Soc., Cambriged (Under communication).
10. Shah Manilal, On generalized Rice's polynomial. Rivista di Matematica, della Universita' di Parma (Under communication).

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ СОДЕРЖАЩИХ ОБОБЩЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ СИСТЕР ЧЕЛИНЕ

(РЕЗЮМЕ)

В данной работе приводятся соотношения содержание обобщенные многочислены Систер Челине, полученные при помощи образующей функции.

При определенном подборе параметров находятся уже известные результаты и выводятся новые результаты представляющие огромный интерес.

ASUPRA CÎTORVA RELAȚII CUPRINZÎND POLINOAME SISTER CELINE GENERALIZATE

(REZUMAT)

În această lucrare cu ajutorul funcției generatoare au fost obținute cîteva relații cuprinzînd polinoame Sister Celine generalizate.

Prin alegerea convenabilă a parametrilor se regăsesc unele rezultate cunoscute și se deduc de asemenea rezultate noi și deosebit de interesante

ASUPRA FUNCȚIILOR REALE DE TIP COSINUS DEFINITE PE UN GRUP *

DE

B. CRSTICI, MARIA KISS-MEDNYANSZKY, ȘT. MATEI

1. Fie $f: E \to F$ o funcție (aplicație, transformare, operator), la care mulțimea de definiție E are structură algebrică de grup, iar mulțimea F în care funcția ia valori are cel puțin structură algebrică de inel. Vom numi funcție de tip cosinus orice funcție care pentru orice x, y din E verifică relația:

$$f(xy)+f(xy^{-1})=2f(x)f(y) \tag{1}$$

În (1) am notat operația grupală din E multiplicativ, iar pentru inelul F am folosit în mod obișnuit notația aditivă pentru operația grupală abeliană și notația multiplicativă pentru operația semigrupală.

Ecuația funcțională (1) a fost mult studiată. Pentru cazul cînd E este grupul aditiv al dreptei reale, iar F corpul numerelor reale, această ecuație este clasică:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{2}$$

Ea a fost considerată de Poisson [9] pentru fundamentarea regulii de compunere a forțelor de intensități egale. Cauchy [3] a dat toate soluțiile continue ale ecuației (2), continuitatea fiind considerată în raport cu topologia obișnuită a dreptei reale. De asemenea și alți autori, după Poisson și Cauchy, s-au ocupat de ecuația funcțională (2) pentru funcții reale de variabilă reală, E fiind grupul aditiv al dreptei reale. Dintre aceștia amintim pe S. Kaczmarz [6] care a demonstrat că soluțiile măsurabile Lebesgue ale ecuației (2) sînt continue.

Recent R. Dacić [4] a stabilit următorul rezultat relativ la ecuația (1) pentru cazul cînd E este un grup abstract, iar F corpul numerelor complexe. Dacă f este soluție a ecuației (1) pentru care există un $e_0 \in E$ astfel ca $f(e_0)=0$ și care verifică condiția $f(xye_0)=f(xe_0y)$ pentru orice x, $y \in E$ atunci această soluție este de forma

$$f(x)=\frac{g(x)+[g(x)]^{-1}}{2} \tag{3}$$

unde $g: E \to F$ este un omomorfism arbitrar (nebanal) al grupului E în grupul multiplicativ al numerelor complexe diferite de zero, adică

$$g(xy)=g(x)g(y) \tag{4}$$

---

* Lucrare prezentată la Sesiunea cadrelor didactice I. P. Buc. mai 1970.

Înainte de R. Dacić, Pl. Kannappan [7] a demonstrat că acele soluţii complexe ale ecuaţiei (1) care verifică condiţia $f(xyz)=f(xzy)$ pentru orice $x, y, z\in E$ sînt de forma (3).

În nota de faţă vom stabili rezultate analoage relative la funcţii reale definite pe un grup oarecare. Aceste rezultate nu se pot obţine direct prin particularizarea rezultatelor referitoare la funcţii complexe, deoarece la stabilirea acestora din urmă intervine esenţial proprietatea de corp algebric închis a mulţimii numerelor complexe.

În obţinerea acestor rezultate vom urmări unele idei ale lui P. Montel [8] şi Th. Angheluţă [1] privitoare la ecuaţia (2)

2. Fie deci ecuaţia (1) considerată pentru funcţii $f: E\to R$, unde E este un grup oarecare, iar R mulţimea numerelor reale. Oricare ar fi soluţia f a acestei ecuaţii ea are următoarele proprietăţi:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } f(e)=1 \text{ sau } f(e)=0,\ e \text{ unitatea grupului.}\\
&\text{b) } f(e)=0 \Rightarrow f(x)\equiv 0,\quad \forall x\in E\\
&\text{c) } f(x^{-1})=f(x),\quad \forall x\in E\\
&\text{d) } f(xy)=f(yx),\quad \forall x,\ y\in E\\
&\text{e) } f(x^2)=2f^2(x)-1,\quad \forall x\in E
\end{aligned}\tag{5}$$

Aceste proprietăţi se deduc uşor din ecuaţia (1). Astfel a) se obţine ţinînd cont că ecuaţia (1) trebuie să fie verificată şi pentru $x=y=e$. Proprietatea b) se obţine luînd în ecuaţie x oarecare şi $y=e$. Soluţia identic nulă era vizibilă de la bun început, această soluţie o vom numi soluţia banală. În cele ce urmează va fi vorba despre soluţii diferite de cea banală. Proprietatea c) se obţine luînd în ecuaţie $x=e$ şi y oarecare şi ţinînd cont că $f(e)=1$. Proprietatea d) rezultă din ecuaţia (1) ţinînnd cont de proprietatea precedentă şi de faptul că membrul al doilea al ecuaţiei (1) nu se schimbă cînd x şi y îşi schimbă reciproc rolurile. Ultima proprietate se obţine pentru $y=x$, luînd în considerare că $f(e)=1$. Toate aceste proprietăţi sînt la fel şi pentru soluţiile complexe ale ecuaţiei (1).

Fie acum f o soluţie a ecuaţiei (1) care verifică condiţia $f(xyz)=f(xzy)$.

Lema 1. Între mulţimea S a soluţiilor ecuaţiei (1) care verifică condiţia

$$f(xyz)=f(xzy),\quad \forall x,\ y,\ z\in E \tag{6}$$

şi mulţimea T a soluţiilor ecuaţiei

$$f^2(xy)-2f(xy)f(x)f(y)+f^2(x)+f^2(y)-1=0 \tag{7}$$

există relaţia de incluziune

$$S\subset T. \tag{8}$$

Într-adevăr, avem

$$f(xyxy^{-1})+f(xyyx^{-1})=2f(xy)f(xy^{-1})$$

Însă

$$f(xyxy^{-1}) = f(xyy^{-1}x) = f(x^2)$$

pe baza condiției (6).

La fel

$$f(xyyx^{-1}) = f(yx^{-1}xy) = f(y^2)$$

pe baza proprietății (5) d).

Avem deci

$$f(x^2) + f(y^2) = 2f(xy)\, f(xy^{-1})$$

sau, aplicînd proprietatea (5) e)

$$f^2(x) + f^2(y) - 1 = f(xy)\, f(xy^{-1}) \tag{9}$$

Mai departe eliminăm $f(xy^{-1})$ între ecuațiile (1) și (9) obținem

$$f^2(xy) - 2f(xy)\, f(x)\, f(y) + f^2(x) + f^2(y) - 1 = 0$$

adică ecuația (7) și lema este demonstrată.

Fie K mulțimea soluțiilor ecuației (7) pentru care avem

$$f(xy) = f(xy^{-1}) \tag{10}$$

Lema 2. Mulțimea T a soluțiilor ecuației (7) este formată din mulțimea soluțiilor care verifică condiția (10) și mulțimea S a tuturor soluțiilor ecuației (1):

$$T = S_1 \cup K \tag{11}$$

Într-adevăr, punînd y^{-1} în loc de y în (7) obținem

$$f^2(xy^{-1}) - 2f(xy^{-1})\, f(x)\, f(y) + f^2(x) + f^2(y) - 1 = 0$$

Scăzînd această ecuație din (7) avem

$$f^2(xy) - f^2(xy^{-1}) - 2f(x)\, f(y)\, [f(xy) - f(xy^{-1})] = 0$$

sau

$$[f(xy) - f(xy^{-1})]\, [f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) f(y)] = 0$$

de unde

$$f(xy) - f(xy^{-1}) = 0$$

$$f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x)\, f(y) = 0$$

ceea ce demonstrează lema.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1848

Ecuația (7) o scriem sub forma

$$[f(xy) - f(x)\, f(y)]^2 = [f^2(x) - 1]\, [f^2(y) - 1] \tag{12}$$

De aici deducem

Lema 3. Dacă $\exists\ x_0$ astfel ca $f(x_0) > 1$, atunci $f(x) \geqslant 1$ pentru $\forall\ x \in E$.

Într-adevăr, cu $y = x_0$ din (12) obținem $f^2(x) - 1 \geqslant 0$ și deoarece din proprietatea (5) e) rezultă $f(x) \geqslant -1$ pentru orice $x \in E$, lema este demonstrată.

Lema 4. Dacă $\exists x_0$ astfel ca $f(x_0)<1$ atunci $f(x)\in[-1,1]$ pentru orice $x\in E$.

Lema rezultă din (12) cu $y=x_0$ şi ţinînd cont de consecinţa amintită mai sus a proprietăţii (5) e).

Lema 5. Dacă $f(x_1)=1$ atunci $f(x)=1$ pentru orice x din grupul generat de elementul x_1.

Într-adevăr, atunci din (12) rezultă cu $x=x_1$

$$f(x_1y)=f(x_1)\,f(y).$$

Pe de altă parte din ecuaţia (1) avem

$$f(x_1)\,f(y)=\frac{1}{2}[f(x_1y)+f(x_1y^{-1})]$$

deci

$$f(x_1y)=f(x_1y^{-1})$$

de unde pe baza proprietăţii (5) c)

$$f(x_1y)=f(yx_1^{-1}). \tag{13}$$

Relaţia (13) este adevărată pentru orice y, deci şi pentru $y=x$. Avem atunci

$$f(x_1^2)=f(e)=1.$$

Punînd acuma în (13) $y=x$, obţinem

$$f(x_1^3)=f(x_1)=1.$$

Prin inducţie obţinem

$$f(x_1^n)=1$$

pentru orice $n\in\mathbf{N}$, iar pe bază proprietăţii (5) c) şi pentru orice $n\in\mathbf{Z}$.

3. Putem demonstra acuma

Teorema 1. Soluţia ecuaţiei funcţionale (1) care verifică condiţia (6) şi pentru care $f(x)\geqslant 1$, $\forall x\in E$ este de forma

$$2f(x)=g(x)+[g(x)]^{-1} \tag{14}$$

unde $g(x)$ este un omomorfism arbitrar al grupului E în grupul multiplicativ al numerelor reale diferite de zero, adică

$$g(xy)=g(x)\,g(y), \quad \forall x,y\in E. \tag{15}$$

Înainte de a trece la demonstraţia teoremei subliniem faptul că ipoteza $f(x)\geqslant 1$ nu este o ipoteză restrictivă despre funcţia f, deoarece pe baza lemelor 3. şi 4. pentru soluţiile ecuaţiei (1) avem

$$f(x)\in[1,+\infty] \quad \text{sau} \quad f(x)\in[-1,1].$$

Avem din (12)

$$f(xy)=f(x)\,f(y)+\sqrt{(f^2(x)-1)\,(f^2(y)-1)}. \tag{16}$$

Să adunăm în ambii membrii $\sqrt{f^2(xy)-1}$. Avem

$$f^2(xy)-1=(f(x)\sqrt{f^2(xy)-1}+f(y)\sqrt{f^2(xy)-1})^2.$$

Deci din (16) obținem

$$f(xy)+\sqrt{f^2(xy)-1}=(f(x)+\sqrt{f^2(x)-1})(f(y)+\sqrt{f^2(y)-1}). \tag{17}$$

Rezultă că funcția

$$g(x)=f(x)+\sqrt{f^2(x)-1} \tag{18}$$

este un omomorfism al grupului E în grupul multiplicativ $\mathbf{R}^*$. Din (18) obținem (14). Deci (14) este soluție a ecuației (7) din care am dedus-o. Pe baza relației de incluziune dată de lema 1, va trebui să verificăm dacă (14) verifică ecuația (1). Răspunsul este afirmativ:

$$\frac{1}{2}g(xy)+\frac{1}{2g(xy)}+\frac{1}{2}g(xy^{-1})+\frac{1}{2g(xy^{-1})}=\frac{1}{2}g(x)\,g(y)+\frac{1}{2g(x)\,g(y)}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{1}{2}\frac{g(y)}{g(x)}=2\,\frac{g(x)+\frac{1}{g(x)}}{2}\cdot\frac{g(y)+\frac{1}{g(y)}}{2}.$$

(La verificare se ține cont de proprietatea omomorfismelor) Deci teorema este demonstrată.

Teorema 2. Soluția ecuației (1) care verifică condiția (6) și pentru care $f^2(x)\leqslant 1$, $\forall x\in E$ este de forma

$$2f(x)=h(x)+[h(x)]^{-1} \tag{19}$$

unde $h(x)$ este un omomorfism arbitrar al grupului E în grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul unitate, adică

$$g(xy)=g(x)\,g(y),\quad \forall x,y\in E \tag{20}$$

$$g(x)\in \mathbf{C}\mid g(x)\mid=1$$

Menționăm și aici că ipoteza $f^2(x)\leqslant 1$ nu este o restricție impusă funcției f. Pentru demonstrația acestei teoreme, vom proceda absolut la fel ca în teorema precedentă, însă de data aceasta funcția

$$h(x)=f(x)+\sqrt{f^2(x)-1}$$

este o funcție complexă

$$h(x)=f(x)+i\sqrt{1-f^2(x)}$$

de modul unitate, de unde rezultă teorema.

Observație. Pe bază lemei 2 ecuația (7) printre ale cărei soluții se găsesc soluțiile ecuației (1) mai are și soluții pentru care $f(xy)=f(xy^{-1})$. Se pune problema care din aceste soluții verifică ecuația (1). Avem atunci

$$f(xy)=f(x)\,f(y)$$

de unde rezultă că f trebuie să fie un omomorfism al grupului E în grupul multiplicativ al numerelor reale. Singurul dintre aceste omomorfisme care verifică și ecuația (1) este $f(x)\equiv 1$. Acesta însă este cuprins în soluția dată

de teorema 1, anume pentru $g(x) \equiv 1$. Deci prin teoremele 1 și 2 au fost obținute toate soluțiile ecuației (1) care verifică condiția (6).

4. Se știe că dacă f este de forma (14) și g este omomorfism atunci din continuitatea lui f rezultă continuitatea lui g. Rezultă atunci că dacă E este un grup topologic, soluțiile continue ale ecuației (1) sînt de forma (14) sau (19) unde g respectiv h sînt omomorfisme continue ale grupului E în grupul multiplicativ $\mathbf{R}^*$ respectiv grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul unitate.

Mulțumim profesorului Octavian Gheorghiu pentru sfaturile date în cursul întocmirii lucrării.

BIBLIOGRAFIE

1. Angheluță, Th., Observații relative la ecuația funcțională a lui Poisson. Lucr. șt. Inst. polit. Cluj, 1959, 33—39.
2. Bourbaki, N., Topologie générale. Livre III, Chap. V, Chap. VIII Hermann Paris.
3. Cauchy, A., Oeuvres complètes II serie, t. III Paris 1897.
4. Dacić, R., The cosine functional equation for groups. Mat. Vesnik VI (XXI), 1969, 339—342.
5. Ghermănescu, M., *Ecuații funcționale.* București 1960.
6. Kaczmarz, S., Sur l'équation fonctionnelle $f(x)+f(x+y)=\varphi(y)\, f\left(x+\frac{y}{2}\right)$ Fund. Math. VI (1924), 122—129.
7. Kannappan, Pl., The functional equation $f(xy)+f(xy^{-1})=2f(x)\, f(y)$ for groups. Proc. Amer. Math. Soc. XIX (1968), 69—74.
8. Montel, P., Sur les fonctions d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique. Ann. Ec. Norm. Sup. (3) XLVIII (1931), 65—94.
9. Poisson, S., *Traité de mécanique.* Paris 1811.

ОБ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ТИПА КОСИНУС ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ГРУППЕ

(РЕЗЮМЕ)

Авторы изучают функциональное уравнение (I) для вещественных функций определенных на произвольной группе E и получают в условиях теоремы 1 и теоремы 2 решения (14) и (19) этого функционального уравнения.

ABOUT REAL FUNCTIONS OF THE COSINE TYPE DEFINED ON A GROUP

(ABSTRACT)

The authors study the functional equation (1) for real functions defined on an arbitrary group E and obtain in the conditions of theorems 1 and 2 the solutions (14) and (19) for this functional equation.

METODĂ DE EFECTUARE A INTEGRALEI ELIPTICE, COMPLETĂ, DE SPEȚA III-a CU PARAMETRU COMPLEX

DE

T. DORDEA

1. INTRODUCERE

O integrală eliptică completă de speța treia cu parametru complex se poate efectua prin metoda prezentată în [1], integrala fiind pusă sub forma Legendre. Această metodă se caracterizează prin calcule voluminoase, cînd se pune problema determinării valorii numerice.

În lucrarea prezentă, se indică o metodă care implică un volum mai mic de calcule, aplicabilă formei algebrice a integralei.

2. TRATAREA

Considerăm integrala

$$\Pi(z^2,k)=\int_0^1 \frac{t^2dt}{(1-k^2z^2t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{1}$$

în care z este un număr complex de forma

$$z=a+ib \tag{2}$$

iar t și k numere reale, k-modulul integralei, satisfăcînd condiția $0 \leqslant k \leqslant 1$.

Funcția $\pi(z^2,k)$, privită ca o funcție de variabila complexă z, are valori finite în tot planul cu excepția semidreptelor din axa reală cu punctele $\left(\frac{1}{k}, 0\right)$ și $\left(-\frac{1}{k}, 0\right)$ ca puncte limită, este continuă, derivabilă și satisface ecuațiile lui Cauchy-Riemann, deci, în afara celor două semidrepte, este olomorfă în tot planul variabilei z.

Considerăm o a doua funcțiune de variabilă complexă, definită, prin:

$$f(z)=\frac{K(k)\,E(z,k)-E(k)\,F(z,k)}{k^2z\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{3}$$

unde $F(z, k)$ și $E(z, k)$ sînt integralele eliptice de speța I și respectiv II cu z ca argumente, k ca modul, iar $K(k)$ și $E(k)$ sînt valorile acestor integrale complete ($z=1$).

Funcțiunea $f(z)$ are valori finite și bine determinate, cu excepția punctelor pentru care $z=\pm\frac{1}{k}$, este continuă și are derivate în același domeniu ca și funcțiunea $\Pi(z^2, k)$, cari satisfac ecuațiile Cauchy-Riemann. În consecință și $f(z)$ este o funcțiune olomorfă.

Pentru cazul că z este o mărime reală cuprinsă între 0 și 1, în conformitate cu [2. p 241], cele două funcțiuni sînt egale, deci:

$$\Pi(z^2\,k)=f(z) \tag{4}$$

Cum atît $\Pi(z^2, k)$, cît și $f(z)$ sînt olomorfe și coincid pe segmentul de dreaptă limitat de punctele 0 și +1 de pe axa reală, segment cuprins în domeniul de olomorfism, înseamnă că aceste funcțiuni coincid în tot planul z în care ele sînt olomorfe, [3 p. 80].

Din proprietățile de însumare a integralelor eliptice [1, p. 13] avem:

$$\begin{aligned} F(w, k)&=F(u, k)+F(v, k)\\ E(w, k)&=E(u, k)+E(v, k)-k^2uvw \end{aligned} \tag{5}$$

unde u, v și w trebuie să satisfacă condiția:

$$w(1-k^2u^2v^2)=u\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}+v\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} \tag{6}$$

mărimile u, v, w, putînd fi reale sau complexe.

Din (5) și (6) rezultă că integralele eliptice de speța I și II se pot descompune în mod arbitrar în cîte două integrale cu același modul, argumentele satisfăcînd ecuația (6).

Dificultățile sînt minime dacă se efectuează descompunerea (5), astfel ca, dacă $w=z$, atunci u să fie o mărime reală iar v pur imaginară, adică $u=x$ și $v=iy$, x și y fiind mărimi reale.

Din relațiile (2) și (6) se obține:

$$\begin{aligned} a(1+k^2x^2y^2)&=x\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}\\ b(1+k^2x^2y^2)&=y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \end{aligned} \tag{7}$$

sistem care se poate rezolva (Anexa A1),

Cu notația:

$$T=\frac{1}{2ka^2}\left\{(1+c^2)(1+k^2c^2)+\sqrt{(1-c^2)^2(1-k^2c^2)^2+4b^2[(1+k^2)(1+k^2c^4)-4a^2k^2]}\right\} \tag{8}$$

se obține:

$$x=\pm\sqrt{\frac{T-\sqrt{T^2-4}}{2k}}$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{x^2-c^2}{k^2x^2c^2-1}}. \tag{9}$$

În (9) x și y au aceleași semne ca a și b, respectiv.

Acum se pot separa părțile reală și imaginară în $\Pi(z^2, k)$. [Anexa A2]. Cu notațiile auxiliare:

$$p=(a^2-b^2)\,[1-(a^2-b^2)]\,[1-k^2(a^2-b^2)]+4a^2b^2[1+k^2-3k^2(a^2-b^2)]$$

$$q=2ab\{1-2(1+k^2)\,(a^2-b^2)+k^2\,[3(a^2-b^2)^2-4a^2b^2]\} \tag{10}$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{p+\sqrt{p^2+q^2}};\quad Q=\frac{q}{\sqrt{2}\sqrt{p+\sqrt{p^2+q^2}}}$$

$$k'^2=1-k^2;\quad y'=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}};\quad x'=\frac{\sqrt{x^2-1}}{k'x}$$

$$\varkappa''=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{k^2x^2-1}{x^2-1}};\quad K=K(k);\quad E=E(k)$$

$$\Lambda_0(x, k)=\frac{2}{\pi}[EF(x, k')+KE(x, k')-KF(x, k')]$$

și ținînd seama că [1, p. 12]:

$$F(iy, k)=iF(y', k')$$

$$E(iy, k)=i\left[F(y', k')-E(y', k')+y\sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+y^3}}\right] \tag{11}$$

și prin urmare:

$$F(z, k)=F(x, k)+i\,F(y', k') \tag{12}$$

$$E(z, k)=E(x,\ k)+bk^2xy+i\left[F(y', k')-E(y', k')+y\sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+y^2}}-ak^2xy\right]$$

se obțin expresiile:

$$\Pi(z^2, k)=\frac{KE(x,\ k)-EF(x,\ k)+Kbk^2xy+i\left[-\frac{\pi}{2}\Lambda_0(y',\ k)+Ky\left(\sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+y^2}}-ak^2x\right)\right]}{k^2(P+iQ)} \tag{13}$$

pentru $0\leqslant x\leqslant 1$;

$$\Pi(^2, k)=\frac{Kbk^2xy+i\left\{-\frac{\pi}{2}\Lambda_0(y', k)+\frac{\pi}{2}\Lambda_0(x',\ k)-K\left[\frac{\sqrt{(x^2-1)\,(1-k^2x^2)}}{x}-\right.\right.}{k^2(P+iQ)}\rightarrow$$

$$\left.\left.\rightarrow\frac{-y\sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+y^2}}+ak^2xy\right]\right\}}{k^2(P+iQ)} \tag{14}$$

pentru $1 \leqslant x < \frac{1}{k}$, și

$$\Pi(z^2, k) = \frac{Kx\left(\sqrt{\frac{k^2x^2-1}{x^2-1}} + bk^2y\right) - KE(x'', k) - EF(x'', k), + i\left\{\frac{\pi}{2}[1 - \Lambda_0(y', k)] + \right.}{k^2(P+iQ)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\left. + Ky\left(\sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+y^2}} - ak^2x\right)\right\}}{k^2(P+iQ)} \tag{15}$$

pentru $x > \frac{1}{k}$.

În felul acesta s-a obținut valoarea integralei $\Pi(z^2, k)$ pentru orice valoare reală sau complexă a lui z.

3. CAZURI PARTICULARE

Cazul 1. *z este o mărime reală*: Avem $b=0$; $a=c$; $y=0$; $x=c$; $q=0$; $Q=0$; $P^2=p=c^2(1-c)(1-k^2c^2)$; $y'=0$; $\Lambda_0(y', k)=0$ și:

$$\Pi(c^2, k) = \frac{KE(x, k) - EF(x, k)}{k^2c\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}} \tag{13'}$$

pentru $0 \leqslant c \leqslant 1$;

$$\Pi(c^2, k) = \frac{\frac{\pi}{2}\Lambda_0(x', k) - K\frac{\sqrt{(c^2-1)(1-k^2c^2)}}{c}}{k^2c\sqrt{(c^2-1)(1-k^2c^2)}} \tag{14'}$$

pentru $1 \leqslant c < \frac{1}{k}$;

$$\Pi(c^2, k) = \frac{Kc\sqrt{\frac{k^2c^2-1}{c^2-1}} - KE(x'', k) - EF(x'', k) + i\frac{\pi}{2}}{k^2c\sqrt{(c^2-1)(k^2c^2-1)}} \tag{15'}$$

pentru $c > \frac{1}{k}$.

Valoarea integralei $\Pi(c^2, k)$ din (15') este complexă pentru că funcțiunea în t care se integrează are un pol pentru $t = \frac{1}{kc} < 1$.

Cazul II. *z este o mărime imaginară*. Avem $a=0$; $b=c$; $x=0$; $y=c$; $p=-c^2(1+c^2)(1+k^2c^2)$; $q=0$; $P=\sqrt{p}$; $Q=0$ și cu acestea:

$$\Pi(-c^2, k) = \int_0^1 \frac{t^2dt}{(1+c^2k^2t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{Kc\sqrt{\frac{1+k^2c^2}{1+c^2}} - \frac{\pi}{2}\Lambda_0(y', k)}{k^2c\sqrt{(1+c^2)(1+k^2c^2)}} \tag{14''}$$

valabilă pentru orice valoare a lui c.

Anexa A1

REZOLVAREA SISTEMULUI (7)

Punînd $a^2+b^2=c^2$, din ridicarea la patrat a egalităților (7) și apoi prin însumare rezultă că

$$c^2(1+k^2x^2y^2)=x^2+y^2 \tag{1-A1}$$

deoarece $1+k^2x^2y^2\neq 0$.

Scoțînd pe y din (1-A1) și introducîndu-l în ecuația 2-a din (7) după ce a fost ridicată la patrat, se obține următoarea ecuație în x:

$$(kx^2)^4-\frac{(1+c^2)(1+k^2c^2)}{ka^2}(kx^2)^3+\frac{2k^2(c^2+b^2)+(1+k^2)(1+k^2c^4)}{k^2a^2}(kx^2)^2-$$

$$-\frac{(1+c^2)(1+k^2c^2)}{ka^2}(kx^2)+1=0. \tag{2-A1}$$

Cu notația (8) din (2-A1), după eliminarea rădăcinilor străine sistemului (7), se obțin expresiile (9).

Anexa A2

SEPARAREA PĂRȚII REALE ȘI A CELEI IMAGINARE ÎN $\Pi(z^2, k)$

Se pune

$$z^2-(1+k^2)z^4+k^2z^6=p+iq \tag{1-A2}$$

$$\sqrt{p+iq}=P+iQ.$$

Cu acestea avem:

$$\Pi(z^2,k)=\frac{KE(x,k)-EF(x,k)+Kbk^2xy+i\left[-\frac{\pi}{2}\Lambda_0(y',k)+Ky\left(\sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+y^2}}-ak^2x\right)\right]}{k^2(P+iQ)}. \tag{2-A2}$$

Dacă $1\leqslant x<\frac{1}{k}$, atunci

$$F(x,k)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}-i\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

sau

$$F(x,k)=K-iF\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{xk'},k'\right). \tag{3-A2}$$

În mod similar se obține pentru $E(x,k)$:

$$E(x,k)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx-i\int_1^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{x^2-1}}\,dx$$

sau

$$E(x,k)=E-i\left[F\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{xk'},\ k'\right)-E\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{xk'},\ k\right)+\frac{1}{x}\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}\right] \quad (4\text{-A2})$$

Cu acestea (2-A2) trece în (14).

Dacă $x>\frac{1}{k}$ atunci,

$$F(x,k)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}-i\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}+\int_{\frac{1}{k}}^x\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}$$

și deci:

$$F(x,k)=K+F\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{k^2x^2-1}{x^2-1}},\ k\right)-i\,K'. \quad (5\text{-A2})$$

Procedînd similar pentru $E(x,k)$ se obține:

$$E(x,k)=E-E\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{k^2x^2-1}{x^2-1}},\ k\right)+x\sqrt{\frac{k^2x^2-1}{x^2-1}}-i\,(K'-E') \quad (6\text{-A2})$$

cari înlocuite în (2-A2) duc la (15).

BIBLIOGRAFIE

1. P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*. Springer Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
2. I. I. Staermann, *Kontaknaia zadacia teorii uprugostii*. Gostehizdat. Moskva-Leningrad 1949.
3. V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare III*; partea II. Editura Tehnică — București 1955.
4. J. M. Rîjic, I. S. Gradștein, *Tablifi integralov, sum, riadov i proizvedenii*. Gosizdat Moskva-Leningrad 1951.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОЛНОГО ИНТЕГРАЛА ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

(РЕЗЮМЕ)

Установлено что полный эллиптический интеграл третьей степени $\Pi(z^2,k)$, рассматриваемый как функция комплексного переменного параметра z, а так же функция комплексного переменного, является голоморфными в одной и той же области и совпадают на отрезке содержащемся в данной области. На этом основании и опираясь на свойстве суммирования эллиптических интегралов, представляется возможным разложение интеграла $\Pi(z^2,k)$ на действительную и мнимую часть путем решения алгебраического выражения.

Получаются общие выражения дающие численное значение более простым путем.

METHODE ZUR LÖSUNG DER VOLLSTÄNDIGEN ELLIPTISCHEN INTEGRALE, DRITTER GATTUNG, MIT KOMPLEXEM PARAMETER

(ZUSAMMENFASSUNG)

Man bemerkt, dass die elliptische Vollständige integrale dritter Gattung $\Pi(z^2, k)$ betrachtet als Funktion der komplexen Veränderlichen im Verhältniss mit den Parameter z, und eine zweite Funktion von komplexen Veränderlichen, in einen Gebiet olomorph und längs eines Segmentes in denselben Gebiet gleich sind.

Auf Grund dieser Betrachtungen und unter der Benützung der Summationseigenschaft der elliptischen Integralen, ist die Zersetzung der $\pi(z^2, k)$-Integrale im reelen und imaginären Teil mittels der Lösung eines algebrischen Systems, möglich.

ÜBER ZYKLISCHE FUNKTIONEN UND LINEARE DIFFERENTIALSYSTEME, DIE ALGEBREN ENDLICHEN RANGES ZUGEORDNET SIND

VON

N. NEUHAUS

In [8] und [9] wurden lineare Differentialsysteme mit konstanten Koeffizienten behandelt, die einer Algebra 3 Ranges bzw einer Zellenmatrixalgebra beliebigen Ranges zugeordnet sind. Die allgemeine Lösung dieser Systeme wurde mit Hilfe der zyklischen Funktionen 3. Ordnung ausgedrückt. In vorliegender Arbeit werden die Betrachtungen aus [8] und [9] auf lineare Differentialsysteme (mit konstanten bzw veränderlichen Koeffizienten) ausgedehnt, die einer Algebra beliebigen endlichen Ranges zugeordnet sind.

Zusätzlich werden einige Betrachtungen in Zusammenhang mit zyklischen Funktionen *n*. Ordnung (auch Appellsche Kosinusfunktionen [1], [2], [5]-[7], [12] genannt) gebracht, die bei der Lösung erwähnter Systeme verwendet werden. Es werden geläufige Methoden der Theorie der linearen Differentialsysteme in Matrixschreibweise [15] und bekannte Begriffe aus der Algebra [16] verwendet.

1. ALGEBREN

In diesem Teil der Abhandlung werden Begriffe und Bezeichnungen eingeführt, die in den nachfolgenden Teilen verwendet werden.

1. a. Es sei $\mathcal{A}_n$ die Algebra der hyperkomplexen Zahlen $\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i\theta^{i-1}$ mit $a_i\in K$ (Körper der reellen oder komplexen Zahlen) definiert wie in [12] durch

$$\theta_i\theta_j=\theta_{i+j} \pmod{n} \qquad (1.1)$$

$$\theta_n=1$$

oder wie in [3], [4] durch $\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i\theta^{i-1}$ und $\theta^n=1$.

Eine solche Algebra ist bekanntlich isomorph mit einer Matrixalgebra desselben Ranges. Die Algebra *n*. Ranges $\mathcal{A}_n$ ist isomorph einer Matrixalgebra *n*. Ranges $\mathfrak{M}_n$ gebildet aus zyklischen Matrizen, die wie in [14] definiert werden kann.

Eine n-reihige quatratische Matrix $A=(a_{pq})$ mit Elementen aus einem Körper K heisst zyklisch, wenn für

$$p=1, 2, \ldots n-1, \quad q=1, 2, \ldots n$$
$$a_{p+1,\,q}=a_{p,\,q-1} \tag{1.2}$$

dabei sind alle Indizes auf kleinste positive Reste mod n zurückgeführt zu denken. Die zyklische Matrix (a_{pq}) ist demnach durch ihre erste Zeile $(a_{1q})=(a_q)$ vermöge (1.3) $a_{pq}=a_{q-p+1}$ festgelegt.

Bezeichnet insbesondere D die zyklische Permutationsmatrix $D=(\delta_{p,\,q-1})$ (Kroneckersches Symbol; Indizes stets mod n), so drückt sich (1.2) aus durch $DA=AD$ und (1.3) durch die (zeilenweise zu verstehende) Bezeichnung $(a_{pq})=(a_q)\,D^{p-1}$, $(p=1, 2, \ldots, n)$ oder auch durch

$$A=\sum_{i=1}^{n} a_i D^{i-1} \tag{1.4}$$

Somit bilden (siehe auch [14]) die zyklischen Matrizen der festen Zeilenzahl n mit Elementen aus K eine Algebra, den Gruppenring zur endlichen zyklischen Gruppe ihrer Basiselemente D^{p-1} $(p=1, 2, \ldots, n)$; sie enthält mit jeder nichtsingulären Matrix auch deren Kehrwert.

Die Abbildung $f\colon \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{M}_n$, definiert durch die Zuordnung $a_i=a_i'(i=1, 2, \ldots, n)$, wobei a_i die Komponenten von $\alpha \in \mathfrak{A}_n$, und a_i' die Elemente der ersten Zeile aus $A \in \mathfrak{M}_n$ sind, ist offenbar ein Isomorphismus. Im besonderen hat man für die Basiselemente $f(\theta^{i-1})=D^{i-1}$ wobei $\theta^{i-1} \in \mathfrak{A}_n$, $D^{i-1} \in \mathfrak{M}_n$.

1.b. Es sei nun Ω_m, die Menge der quadratischen Zellenmatrizen (A_{pq}) vom Typ $(m \times m)$ wobei $A_{pq} \in \mathfrak{M}_n$. Die Menge Ω_m, ausgestattet mit den geläufigen Gesetzen der Addition und Multiplikation der Zellenmatrizen, bildet offenbar einen assoziativen Ring mit Einselement. Das Einselement ist die quasidiagonale Matrix $E_m=[E, \ldots, E]$ vom Typ $(m \times m)$, wobei $E \in \mathfrak{M}_n$. Führt man durch

$$A\,(A_{pq})=(AA_{pq}) \tag{1.5}$$

das Gesetz der Multiplikation der Matrizen $(A_{pq}) \in \Omega_m$ mit Elementen $A \in \mathfrak{M}_n$ ein, so bildet die Menge Ω_m eine Algebra über $\mathfrak{M}_n$.

Im Zusammenhang mit Differentialsystemen, die nachfolgend behandelt werden, betrachtet man Matrizen von der Gestalt

$$L_m=\begin{pmatrix} A & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ E & A & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & (m-1)E & A \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

wobei $A, E, 0 \in \mathfrak{M}_n$, $m \in N$ (E=Einselement, 0=neutrales Element aus $\mathfrak{M}_n$).

Die Menge dieser Matrizen sei hier mit $\bar{\Omega}_m$ bezeichnet.

Offenbar ist $\overline{\Omega}_m \subset \Omega_m$. Die Matrix $L_m \in \overline{\Omega}_m$ kann auch folgenderweise geschrieben werden

$$L_m = \underset{|-}{A}E_m + H_m = E_m\underset{-|}{A} + H_m \tag{1.7}$$

wobei $A \in \mathfrak{M}_n$, $E_m \in \Omega_m$ (Einheitselement). $H_m \in \Omega_m$ ist die nilpotente Zellenmatrix

$$H_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & (m-1)E & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

1.c. Um die Darbietung einer Klasse von Differentialsystemen, die nachfolgend behandelt wird, zu erleichtern sollen nun noch einige Bezeichnungen eingeführt werden. Man bezeichnet mit Ω_{α_j} $(j=1, \dots, s)$ s wie in 1.b definierte Algebren.

Die Elemente dieser Algebren $M_{\alpha_j} \in \Omega_{\alpha_j}$ sind demnach quadratische Zellenmatrizen vom Typ $(\alpha_j \times \alpha_j)$. Mit $E_{\alpha_j} \in \Omega_{\alpha_j}$ wird das Einheitselement aus Ω_{α_j} bezeichnet.

Weiter bezeichnet man mit $\overline{\Omega}_{\alpha_j} \subset \Omega_{\alpha_j}$ Untermengen von Zellenmatrizen der Gestalt

$$A_{\alpha_j} = \begin{pmatrix} A_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E & A_j & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & (\alpha_j-1)E & A_j \end{pmatrix} = \underset{|-}{A_j}E_{\alpha_j} + H_{\alpha_j} \tag{1.9}$$

wobei $A_j \in \mathfrak{M}_n$; E_{α_j}, $H_{\alpha_j} \in \Omega_{\alpha_j}$. Mit H_{α_j} wurde (wie in 1.b.) eine nilpotente Zellenmatrix bezeichnet.

Mit Hilfe der Matrizen A_{α_j} können quasidiagonale Matrizen der Gestalt

$$[A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots, A_{\alpha_s}] = \begin{pmatrix} A_{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{\alpha_2} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & & A_{\alpha_s} \end{pmatrix}; \quad A_{\alpha_j} \in \overline{\Omega}_{\alpha_j} \tag{1.10}$$

gebildet werden. Die Menge der Matrizen (1.10) sei mit π bezeichnet.

2. ZYKLISCHE FUNKTIONEN

Bezeichnet man mit $\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i \theta^{i-1}$, $\theta^n = 1$ die hyperkomplexe Veränderliche, so heisst nach [12] die Gleichung

$$x_1 a p_1 + x_2 a p_2 + \dots + x_n a p_n = v. \tag{2.1}$$

Normalform einer n-Ebene (n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit) des Raumes der Veränderlichen ω.

Mit $ap_l = ap_l(u_1, \ldots, u_{n-1})$ wurden hier die Appellschen Kosinusfunktionen bezeichnet.

Diese Funktionen werden nach [12] durch die Beziehung

$$\tau = \exp\left(\sum_{l=1}^{n} u_l \theta^l\right) = \sum_{k=1}^{n} ap_k \theta^{k-1} \tag{2.2}$$

definiert.

Die Exponentialfunktion wird nach [12] und [13] durch die funktionale Relation $\exp(\omega_1+\omega_2) = \exp\omega_1 \exp\omega_2$ definiert.

Für die Norm von τ hat man nach [12]und [6]

$$N(\tau) = \begin{vmatrix} ap_1 & ap_2 & \ldots & ap_n \\ ap_n & ap_1 & \ldots & ap_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ ap_2 & ap_3 & \ldots & ap_1 \end{vmatrix} = 1 \tag{2.3}$$

Die partiellen Ableitungen der Funktionen ap_k sind durch

$$\frac{\partial ap_k}{\partial u_l} = ap_{k-l}, \pmod n \text{ gegeben.} \tag{2.4}$$

Auf Grund des Isomorphismus $\mathfrak{A}_n \cong \mathfrak{M}_n$ entspricht der Beziehung (2.2) aus $\mathfrak{A}_n$

$$\exp\left(\sum_{l=1}^{n} u_l D^l\right) = \sum_{k=1}^{n} ap_k D^{k-1} = \Gamma(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \tag{2.5}$$

in $\mathfrak{M}_n$. $\Gamma(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ ist hier offenbar eine zyklische Matrix mit der ersten Zeile $(f_1, \ldots, f_n)$ und $f_p = ap_p(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$.

Für die Funktion $\Gamma(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) : R^{n-1} \to \mathfrak{M}_n$ erhält man aus den Beziehungen

$$\exp\left[\sum_{l=1}^{n-1} (u_l+v_l) D^l\right] = \Gamma(u_1+v_1, \ldots, u_{n-1}+v_{n-1}) \tag{2.6}$$

und

$$\exp\left[\sum_{l=1}^{n-1} (u_l+v_l) D^l\right] = \exp\left(\sum_{l=1}^{n-1} u_l D^l\right) \cdot \exp\left(\sum_{l=1}^{n-1} v_l D^l\right)$$

die Matrixgleichung

$$\Gamma(u_1+v_1, \ldots, u_{n-1}+v_{n-1}) = \Gamma(u_1, \ldots, u_{n-1})\, \Gamma(v_1, \ldots, v_{n-1}). \tag{2.7}$$

Daraus erhält man durch Gleichsetzung der Elemente aus der ersten Zeile:

$$f_p(u_1+v_1, \ldots, u_{n-1}+v_{n-1}) = f_k(u_1, \ldots, u_{n-1})\, f_{p-k+1}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \tag{2.8}$$

Somit kann das Additionstheorem der zyklischen Funktionen [14], [10] vom eindimensionalen Raum auf den $(n-1)$-dimensionalen Raum R^{n-1} ausgedehnt werden.

Es gilt also

Satz 1. Das durch (2.2) in $\mathfrak{A}_n$ definierte Funktionssystem erfüllt das Additionstheorem (2.8).

Die partiellen Ableitungen der Funktion $\Gamma: R^{n-1} \to \mathfrak{M}_n$ kann auf Grund von (2.4) und (2.5) folgenderweise berechnet werden

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a p_k}{\partial u_i} D^{k-1} = \sum_{k=i}^{n} a p_{k-i} D^{k-1} \tag{2.9}$$

$=1, 2, \ldots, n$ und $k-i$ stets mod n.

Es ist also $\frac{\partial \Gamma}{\partial u_i}: R^{n-1} \to \mathfrak{M}_n$ und demnach gleichfalls eine zyklische Matrix.

Ist $X_1 (u_1, \ldots, u_{n-1})$ die zyklische Matrix mit der ersten Zeile $(ap_1, ap_2, \ldots, ap_n)$ und sind $X_2, \ldots, X_n$ Matrizen die aus X_1 durch zyklische Permutationen erhalten werden, so gilt

$$\frac{\partial X_k}{\partial u_i} = X_{k-i} \pmod{n}. \tag{2.10}$$

Die Matrix X_k kann auch folgendergestalt geschrieben werden:

$$X_k = (\sigma_k \sigma_{k+1} \ldots \sigma_{k-1}) \text{ wobei mit } \sigma_j \ (j=1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

die Spalten (Vektorfunktionen) von X_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ bezeichnet wurden. Da auf Grund von (2.10)

$$\frac{\partial}{\partial u_i} (\sigma_k (u_1, \ldots, u_{n-1}) \ldots) = (\sigma_{k-i} (u_1, \ldots, u_{n-1}) \ldots)$$

folgt dass

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial u_i} = \sigma_{k-i} \pmod{n} \tag{2.12}$$

Durch Ableiten erhält man aus (2.5)

$$D^i \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i D^i\right) = D^i X_1 = \frac{\partial X_1}{\partial u_i}$$

oder

$$D^i (\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n) = (D^i \sigma_1 D^i \sigma_2 \ldots D^i \sigma_n) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u_i}, \ldots, \frac{\partial \sigma_n}{\partial u_i}\right)$$

und somit

$$D^i \sigma_k = \frac{\partial \sigma_k}{\partial u_i} = \sigma_{k-i} \pmod{n}. \tag{2.13}$$

Aus (2.13) folgt für X_k:

$$D^i X_k = (D^i X_k \ldots) = (\sigma_{k-i} \ldots) = \frac{\partial X_k}{\partial u_i} \pmod{n}$$

oder

$$\frac{\partial X_k}{\partial u_i} = D^i X_k = X_{k-i} \pmod{n}. \tag{2.14}$$

Es seien nun $u_i(x) : \mathfrak{D} \subset R \to R$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, auf $\mathfrak{D}$ differenzierbare Funktionen und $U(x) : \mathfrak{D} \to \mathfrak{M}_n$ eine Matrix mit der ersten Zeile $(0 u_1(x) \ldots \ldots u_{n-1}(x))$. Dann ist $X_k\ (u_1(x) \ldots u_{n-1}(x)) : \mathfrak{D} \subset R \to \mathfrak{M}_n$ auf $\mathfrak{D}$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{dX_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial X_k}{\partial u_i} \frac{du_i}{dx} = \sum_{i=1}^{n-1} D^i X_k u_i'(x) = U'(x)\, X_k \tag{2.15}$$

und gleichfalls

$$\frac{d\sigma_k}{dx} = U'(x)\, \sigma_k. \tag{2.16}$$

3. DIFFERENTIALSYSTEME MIT VERÄNDERLICHEN KOEFFIZIENTEN

3.a. Ist $U(x) : \mathfrak{D} \subset R \to \mathfrak{M}_n$ festgelegt durch die erste Zeile $(0 u_1(x) \ldots \ldots u_{n-1}(x))$, wobei die $u_i(x) : \mathfrak{D} \to R$ auf $\mathfrak{D}$ differenzierbar sind und ist Y die transponierte Matrix von $(y_1 \ldots y_n)$ so gilt für das lineare Differentialsystem

$$\frac{dY}{dx} = U'(x)\, Y. \tag{3.1}$$

Satz 1. Das Funktionensystem $\sigma_k (k = 1, \ldots, n)$, gebildet aus den Spalten der Matrix $X_k(u_1(x) \ldots u_{n-1}(x)) : \mathfrak{D} \subset R \to \mathfrak{M}_n$ ist ein Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialsystems (3.1).

B e w e i s. Aus (2.15) und (2.16) folgt sofort, dass X_k und $\sigma_k (k = 1, \ldots, n)$. Lösungen von (3.1) sind. Die lineare Unabhängigkeit dieser Lösungen folgt aus (2.3).

Für die allgemeine Lösung des Differentialsystems (3.1) hat man somit

$$Y = \sum_{k=1}^{n} c_k \sigma_k. \tag{3.2}$$

A n m e r k u n g Durch Anwendung geläufiger Methoden zur Auflösung linearer Differentialsysteme in Matrixschreibweise hat man offenbar

$$Y = \exp U(x).$$

Da aber $U(x) : \mathfrak{D} \subset R \to \mathfrak{M}_n$ hat man auf Grund von (2.5)

$$Y = \exp U(x) = \exp \sum_{i=1}^{n-1} u_i D^i = \sum_{k=1}^{n} a p_k D^{k-1} = X_1(u_1(x) \ldots u_{n-1}(x)).$$

3.b. Es sei nun

$$\frac{dY}{dx} = V'(x)\, Y \tag{3.3}$$

ein lineares Differentialsystem mit $V(x) : \mathfrak{D} \subset R \to \mathfrak{M}_n$. $V(x)$ ist festgelegt durch die erste Zeile $(u_0(x), u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x))$, wobei die $u_i(x) : \mathfrak{D} \subset R \to R (i = 1, \ldots, n-1)$ auf $\mathfrak{D}$ differenzierbar sind.

Vermöge $Y = e^{u_0(x)} Z$ geht (3.3) über in

$$\frac{dZ}{dx} = U'(x)\, Z \text{ wobei } U(x) : \mathfrak{D} \subset R \to \mathfrak{M}_n \tag{3.4}$$

festgelegt durch die erste Zeile $(0\, u_1(x) \ldots u_{n-1}(x))$.

(3.4) ist aber von der Gsetalt (3.1) und hat deshalb σ_k $(k = 1, \ldots, n)$ als Fundamentalsystem von Lösungen. Es folgt nun sofort , dass $e^{u_0(x)} \sigma_k (k = 1, \ldots n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für (3.4) ist.

Somit hat man

Satz 2. Das Funktionensystem $e^{u_0(x)} \sigma_k (u_1(x) \ldots u_{n-1}(x))$ $(k = 1 \ldots n)$ ist ein Fundamentalsystem von Lösungen für das Differentialsystem (3.3).

Demnach ist die allgemeine Lösung von (3.3)

$$Y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{u_0(x)} \sigma_k. \tag{3.5}$$

3.c. Ein allgemeineres System ist

$$\frac{dY}{dx} = F(x)\, Y \tag{3.6}$$

mit $F(x) : \mathfrak{D} \subset R \to \overline{\Omega}_m$ der Gestalt $F(x) = \underset{|-}{V'(x)}\, E_m + H_m$. $V(x) : \mathfrak{D} \subset R \to \mathfrak{M}_n$ ist festgelegt durch die erste Zeile $(u_0(x), \ldots, u_{n-1}(x))$ und die $u_i(x) : \mathfrak{D} \subset R \to R$ sind auf $\mathfrak{D}$ differenzierbar.

Das Fundamentalsystem von Lösungen für (3.6) kann mit Hilfe von $\sigma_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ ausgedrückt werden.

Durch $Y = e^{u_0(x)} Z$ geht nämlich (3.6) über in

$$\frac{dZ}{dx} = f(x) Z \tag{3.7}$$

wobei $f(x) : \mathfrak{D} \subset R \to \overline{\Omega}_m$ eine Matrix der Gestalt $f(x) = \underset{|-}{U'(x)}\, E_m + H_m \cdot U(x) :$ $: \mathfrak{D} \subset R \to \mathfrak{M}_n$ ist durch die erste Zeile $(0 u_1 \ldots u_{n-1})$ festgelegt.

Das System (3.7) hat aber als Fundamentalsystem von Lösungen

$$\underset{|-}{Z_{k\mu}(x) = N_\mu(x)}\, \sigma_k(x), \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 0, 1, \ldots, m-1 \end{matrix} \tag{3.8}$$

wobei $N_\mu(x) = (0 \ldots 0, S_{\mu 0}(x) \ldots S_{\mu p}(x) \ldots S_{\mu\mu}(x))^T$ (T bedeutet die Zellenmatrix wird transponiert) mit $S_{\mu p}(x) = C^p_{m-\mu+p-1} X^p E$, $p = 0, 1, \ldots, \mu$ und 0, $E \in \mathfrak{M}_n$. Zieht man nämlich in Betracht dass

$$(m-\mu+p-1)\, C^{p-1}_{m-\mu+p-2} = p C^p_{m-\mu+p-1}$$

$$(m-\mu+p-1)\, S_{\mu,p-1}=pC^{p}_{m-\mu+p-1}X^{p-1}E=(S_{\mu,p}(x))'$$

$$H_m N_\mu(x)=(0\ \dots\ 0\ \dots\ (m-\mu+p-1)\, S_{\mu,p-1}\dots\ (m-1)\, S_{\mu,\mu-1})=N'_\mu(x)$$

$$N_\mu(x)\,[U'(x)\,\sigma_k(x)]=\underset{|-}{U'}(x)\,N_\mu(x)\,\underset{-|}{\sigma_k}(x)$$

so kann für $Z_{k\mu}$ geschrieben werden

$$Z'_{k\mu}=N'_\mu(x)\,\sigma_k(x)+N_\mu(x)\,\underline{[U'(x)\,\sigma_k(x)]}=H_m N_\mu(x)\,\underset{-|}{\sigma_k}(x)+\underset{|-}{U'}(x)\,N_\mu(x)\,\underset{-|}{\sigma_k}=$$

$$=H_m Z_{k\mu}+\underset{|-}{U'}(x)\,Z_{k\mu}=(H_m+\underset{|-}{U'}(x)\,E_m)\,Z_{k\mu}.$$

Somit ist $Z_{k\mu}$ Lösung von (3.7).

Es sei nun vorausgesetzt dass

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{m-1}\lambda_{k\mu}Z_{k\mu}\equiv 0 \tag{3.9}$$

wobei $\lambda_{k\mu}$ mn beliebige Konstanten sind. Aber $\sum_{\mu=0}^{m-1}\lambda_{k\mu}N_\mu$ ist eine Zellenmatrix (G_p) vom Typ $(m\times 1)$ mit

$$G_p=\sum_{\mu=m-1-p}^{m-1}\lambda_{k\mu}S_{\mu,\,\mu-(m-1)+p},\ p=0,1,\dots,m-1.$$

Somit kann (3.9) auch noch geschrieben werden

$$\sum_{k=1}^{n}\underset{-|}{(G_p)}\,\sigma_k=\sum_{k=1}^{n}\underset{-|}{(G_p\sigma_k)}=\left(\sum_{k=1}^{n}\underset{-|}{G_p\sigma_k}\right)\equiv 0 \tag{3.10}$$

oder

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{\mu=m-1-p}^{m-1}\lambda_{k\mu}C_p^{\mu-(m-1)+p}x^{\mu+p-(m-1)}E\right]\sigma_k\right)=0 \tag{3.11}$$

Durch Gleichsetzung der Zellen aus beiden Seiten obiger Gleichheit erhält man

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{\mu=m-1-p}^{m-1}\lambda_{k\mu}C_p^{m-1-\mu}x^{\mu+p-(m-1)}\right]\sigma_k\equiv 0. \tag{3.12}$$

Aus (3.12) erhält man sukzessive (in Betracht ziehend, dass die σ_k $k=1,\dots,n$ linear unabhängig sind) für $p=0$: $\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,\,m-1}\sigma_k=0$ und somit

$$\lambda_{k,\,m-1}=0\,;\ k=1,\dots,n$$

für

$$p=1:\ \sum_{k=1}^{n}[\lambda_{k,\,m-2}C_1^1+\lambda_{k,\,m-1}C_1^0x]\,\sigma_k\equiv 0$$

und somit

$$\lambda_{k,\,m-2}=0\,;\ k=1,\dots,n \text{ usw.}$$

Auf Grund der vorherigen Ergebnisse erhält man schliesslich für $p=m-1$: $: \lambda_{k,0}=0$; $k=1, \ldots, n$.

Somit ist das Lösungssystem (3.8) linear unabhängig und es gilt

Satz 3. Das Funktionensystem $e^{\mu_0(x)} N_\mu(x) \underset{-1}{\sigma_k}(x)$ $(\mu=0,1, \ldots, m-1$, $k=1, \ldots, n)$ ist ein Fundamentalsystem von Lösungen für (3.6).

Die allgemeine Lösung von (3.6) ist dann

$$Y=\sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{m-1} c_{k\mu} e^{\mu_0 \cdot (x)} N_\mu(x) \underset{-1}{\sigma_k}(x)$$

$C_{k\mu}$ sind beliebige Konstanten.

Anmerkung. Für $m=1$ geht Ω_m in $\mathfrak{M}_n$, E_m, $H_m \in \Omega_m$ in E, $0 \in \mathfrak{M}_n$ und (3.6) in (3.3) über. Es ist demnach (3.3) ein Sonderfall von (3.6).

3.d. Es sei nun

$$\frac{dY}{dx}=\underset{-1}{(V'(x) E_m+w'(x) H_m)} Y \tag{3.13}$$

ein lineares Differenzialsystem, wobei $V'(x)$ und E_m, $H_m \in \Omega_m$ dieselbe Bedeutung wie in (3.6) haben und $w(x) : \mathfrak{D} \subset R \to R$ eine auf $\mathfrak{D}$ differenzierbare Funktion ist. Bezeichnet man mit $N_\mu^*(x)=(0 \ldots 0 \ldots S_{\mu p}^*(x) \ldots S_{\mu\mu}^*)^T$ eine lineare Zellenmatrix vom Typ $(m \times 1)$, wobei $0 \in \mathfrak{M}_n$, $S_{\mu p}^*(x)=C_{m-\mu+p-1}^p w^p(x) E$; $E \in \mathfrak{M}_n$; $p=0,1, \ldots, \mu$, und zieht man in Betracht dass

$$(S_{\mu p}^*)'=(m-\mu+p-1) w'(x) S_{\mu, p-1}^*$$

$$w'(x) H_m N_\mu^*=(N_\mu^*)'$$

so kann gleicherweise wie für (3.6) gezeigt werden, dass folgender Satz stattfindet :

Satz 4. Das Funktionensystem $e^{u_0(x)} N_\mu^*(x) \underset{-1}{\sigma_k}(x)$; $(\mu=0, 1 \ldots m-1$; $k=1, \ldots, n)$ ist ein Fundamentalsystem von Lösungen für das Differential system (3.13).

Die allgemeine Lösung von (3.13) ist

$$Y=\sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{m-1} c_{k\mu} e^{u_0(x)} N_\mu^*(x) \underset{-1}{\sigma_k}(x)$$

wobei $c_{k\mu}$ beliebige Konstanten sind.

Anmerkung. Für $w(x)=x$ umfasst die Klasse von Differenzialsy s temen (3.13) die Systeme (3.6) als Partikülärfall.

3.e. Man betrachtet nun das System

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dx}=\Phi(x)\mathfrak{y} \tag{3.14}$$

wobei $\Phi(x): \mathfrak{D} \subset R \to \mathrm{II}$ die Quasidiagonalmatrix

$$[F_1(x), \ldots, F_s(x)] \text{ mit } F_j = \underset{|-}{V_j'}(x) E_{aj} + H_{aj}; \; V_j(x): \mathfrak{D} \subset R \to \mathfrak{M}_n;$$

$$E_{aj}, H_{aj} \in \Omega_{aj}, \quad j = 1, \ldots, s.$$

$Y_j(x)$ sind zyklische Matrizen festgelegt durch die erste Zeile $(u_{0j}, u_{1j}, \ldots$ $\ldots, u_{n-1,j})$. Die $u_{ij}(x): \mathfrak{D} \subset R \to R$ sind auf $\mathfrak{D}$ differenzierbar.

$\mathfrak{y} = \left(y_1 \ldots y_{n a_1} \ldots y_{n(a_1+a_2)} \ldots y_{n \sum_1^s a_j}\right)^T$ kann als Zellenmatrix vom Typ $\left(\sum_1^s \alpha_j \times 1\right)$ geschrieben werden, so dass jede Zelle mit Y_j, $(j = 1, \ldots, s)$ so erhält man $\mathfrak{y} = (Y_1 \ldots Y_s)^T$.

Bezeichnet man

$$\mathfrak{y}_j(x) = (0 \ldots 0 \, \mathfrak{z}_j(x) \, 0 \ldots 0) \quad j = 1, \ldots, s \tag{3.15}$$

$$\mathfrak{z}_j(x) = e^{u_{0j}(x)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{j-1} C_{k\mu} N_{\mu j}(x) \sigma_k(x); \; (c_{k\mu} = \text{beliebige Konstanten}),$$

$$N_{\mu j} = (0 \ldots 0 \, S_{\mu j 0} \ldots S_{\mu j p} \ldots S_{\mu i \mu}); \; 0 \in \mathfrak{M}_n,$$

$$S_{\mu j p} = C^p_{a_j - \mu + p - 1} x^p E; \quad p = 0, 1, \ldots, \mu; \; E \in \mathfrak{M}_n \text{ so gilt.}$$

Satz 5. (3.15) ist ein Fundamentalsystem von Lösungen für (3.14).

B e w e i s. Das System (3.15) ist offenbar linear unab hängig. Es ist nun noch zu beweisen dass die $\mathfrak{y}_j$ das System (3.14) erfüllen. Nun ist aber

$$\frac{d\mathfrak{z}_j}{dx} = F_j(x) \, \mathfrak{z}_j$$

da nach Satz 3. $\mathfrak{z}_j$ offenbar eine Lösung eines Systems der Gestalt (3.6) ist Infolgedessen kann man schreiben

$$\Phi(x) \mathfrak{y}_j(x) = [F_1(x) \ldots F_j(x) \ldots F_s(x)] (0 \ldots 0 \, \mathfrak{z}_j(x) \, 0 \ldots 0)^T =$$

$$= (0 \ldots 0 \, F_j(x) \, \mathfrak{z}_j(x) \, 0 \ldots 0)^T = \left(0 \ldots 0 \, \frac{d\mathfrak{z}_j}{dx} \, 0 \ldots 0\right)^T = \frac{d\mathfrak{y}_j}{dx}$$

Damit ist Satz 5. bewiesen.

Die allgemeine Lösung von (3.14) ist

$$\mathfrak{y} = \sum_{j=1}^{s} C_j \mathfrak{y}_j(x) = \sum_{j=1}^{s} C_j \left(\underbrace{0 \ldots 0}_{j-1} e^{u_{0j}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{a_j - 1} C_{k\mu} N_{\mu j} \underset{|-}{\sigma_k} 0 \ldots 0\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} e^{u_{0j}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{a_j - 1} C_j C_{k\mu} \left(0 \ldots 0 \, \underset{|-}{N_{\mu j} \sigma_k} \, 0 \ldots 0\right)$$

oder mit $C_j C_{k\mu} = C_{k\mu j}$ und $(\underbrace{0 \dots 0}_{j-1}) N_{\mu j} \underset{-|}{\sigma_k} 0 \cdots 0)$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{\alpha_j - 1} C_{k\mu j} \mathfrak{y}_{\mu j k}(x)\, e^{u_{0j}(x)} \tag{3.16}$$

Anmerkung. Für $s=1$ erhält man aus der Klasse von Systemen (3.14) die Systeme (3.6).

3.d. Als Verallgemeinerung aller bisher behandelten Systeme, kann folgende Systemklasse betrachtet werden

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dx} = \Psi(x)\, \mathfrak{y} \tag{3.17}$$

wobei $\Psi(x) : \mathfrak{D} \subset R \to \overline{\Pi}$ die Quasidiagonalmatrix $\Psi(x) = [\mathfrak{F}_1(x) \dots \mathfrak{F}_s(x)]$ mit $\mathfrak{F}_j(x) = V_j'(x) E_{\alpha j} + w_j'(x) H_{\alpha j}$, $V_j(x) : \mathfrak{D} \subset R \to \mathfrak{M}_n$; $E_{\alpha j}, H_{\alpha j} \in \Omega_{\alpha j}$. Die $w_j(x) : \mathfrak{D} \subset R \xrightarrow{|-} R$ $(j=1, \dots, s)$ sind auf $\mathfrak{D}$ differenzierbar. $\mathfrak{y}$ wird folgendergestalt als Zellenmatrix geschrieben

$$\mathfrak{y} = (Y_1, \dots, Y_s)^T.$$

Betrachtet man als Funktionensystem

$$\mathfrak{y}_j^*(x) = (0 \dots 0\, \mathfrak{s}_j^*(x)\, 0 \dots 0)^T, \quad j=1, \dots, s \tag{3.18}$$

wobei

$$\mathfrak{s}_j^*(x) = e^{u_{0j}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{j-1} C_{k\mu} N_{\mu j}^*(x) \underset{-|}{\sigma_k}(x),$$

($C_{k\mu}$ beliebige Konstanten) mit

$$N_{\mu j}^*(x) = (\underbrace{0 \dots 0}_{\alpha_j - \mu - 1} S_{\mu j 0}^* \dots S_{\mu j p}^* \dots S_{\mu j \mu}^*) ; \quad 0 \in \mathfrak{M}_n$$

und

$$S_{\mu j p}^* = C_{\alpha_j - \mu + p - 1}^{p} w^p(x) E, \quad (p=0, 1, \dots, \mu), \quad E \in \mathfrak{M}_n \text{ so gilt.}$$

Satz 6. Das Differenzialsystem (3.17) hat als Fundamentalsystem von Lösungen (3.18).

Satz 6. kann genau so wie Satz 5. bewiesen werden. Die allgemeine Lösung für (3.17) ist

$$\mathfrak{y} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{\alpha_j - 1} C_{k\mu j}\, \mathfrak{y}_{\mu j k}(x)\, e^{u_{0j}(x)} \tag{3.19}$$

wobei

$$\mathfrak{y}_{\mu j k} = (0 \dots 0\, N_{\mu j}^* \underset{-|}{\sigma_k} 0 \dots 0)$$

und $C_j C_{k\mu} = C_{k\mu j}$ (beliebige Konstanten)

Anmerkung. Für $s=1$ erhält man aus (3.17) die Systeme (3.13). Setzt man $w(x) = x$ so geht die Systemklasse (3.17) in (3.14) über.

4. DIFFERENTIALSYSTEME MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

Setzt man im Differenzialsystem (3.3) $u_{i+1}(x)=a_{i+1}x$, $a_{i+1}\in K$, $(i=1, \ldots s)$ dann ist $V(x)=Ax$, mit $A\in\mathfrak{M}_n$, $n\in N$ und $V'(x)=A$. Infolgedessen geht (3.3) über in das System mit konstanten Koeffizienten.

$$\frac{dY}{dx}=AY \tag{4.1}$$

dessen Lösung auf Grund von Satz 2. mit Hilfe der zyklischen Funktionen $ap_r(a_2x, \ldots, a_rx)$ $(r=1, \ldots, n)$ ausgedrückt werden kann.

Das System (4.1) kann auch in [10] und [14] angetroffen werden. Es werden hier mit Hilfe von (4.1) die zyklischen Funktionen definiert.

Gleicherweise erhält man für $u_{i+1}(x)=a_{i+1}x$ aus (3.6) das System

$$\frac{dY}{dx}=\overline{A}Y \text{ wobei } \overline{A}\in\overline{\Omega}_m. \tag{4.2}$$

Die Matrix $\overline{A}$ kann in diesem Fall auch in der Gestalt $\overline{A}=\underset{|-}{A}E_m+H_m$ mit $A\in\mathfrak{M}_n$; E_m, $H_m\in\Omega_m$ geschrieben werden.

Die mit Hilfe der Appellfunktionen ausgedrückte Lösung ist nun durch Satz 3. gegeben.

Setzt man in (3.14) $u_{i+1}(x)=a_{i+1,j}x$ $(i=0, \ldots, n-1;\ j=1, \ldots, s,)$ so ist $V_j(x)=A_jx$, $F_j(x)=\underset{|-}{A}_jE_{aj}+H_{aj}=A_{aj}$ mit $A_j\in\mathfrak{M}_n$; E_{aj}, $H_{aj}\in\Omega_{aj}$, $A_{aj}\in\overline{\Omega}_{aj}\subset\Omega_{aj}$.

Die Matrix $\Phi(x)$ geht über in $[A_{a_1}\ldots A_{a_s}]=B\in\Pi$. Infolgedessen geht (3.14) über in das System mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{dY}{dx}=BY,\ B\in\Pi \tag{4.3}$$

dessen Lösung durch Satz 5 gegeben ist.

Anmerkung. Die Systeme (4.1) und (4.2) können auch aus (4.3) erhalten werden indem man $s=1$ und $m=1$ bzw $s=1$ setzt.

Das System (4.3) kann aus (3.17) für $u_{i+1,j}(x)=a_{i+1,j}x$ und $w_j(x)=x$ erhalten werden.

Für $u_{i+1,j}=a_{i+1,j}x$, $(i=0, \ldots, n-1, j=1, \ldots, s)$ und $w_j(x)=\alpha_j+x\sum_{i=1}^{n-1}a_{i+1,j}$, $j=1, 2, \ldots, s$, erhält man aus (3.17) das Differentialsystem mit konstanten Koeffizienten.

$$\frac{dY}{dx}=\overline{B}Y \tag{4.4}$$

wobei

$$\overline{B}=[\overline{A}_{a_1}\dots\overline{A}_{a_s}]\in\overline{\Pi}^{*)};\ \overline{A}_{aj}\subset\overline{\Omega}_{aj}\in\Omega_{aj}$$

und

$$\overline{A}_{aj}=\underset{|-}{A_jE_{aj}}+\sum_{i=1}^{n-1}a_{i+1,j}H_{aj},\ j=1,\dots,s.$$

Die Lösung dieses Systems ist durch Satz 6 gegeben.

Anmerkung. Setzt man $\alpha_j=0$, $n=3$ so erhält man aus (4.4) die in [9] behandelten Systeme.

Wird zusätzlich $a_{3,j}=0$ so erhält man die in [8] behandelten Systeme.

LITERATURVERZEICHNIS

1. Appell P., Comptes Rendus Ac. Sci. Paris 84, 540 (1877).
2. Appell P., Comptes Rendus Ac. Sci. Paris 84, 1378 (1877).
3. Ciorănescu N., Anal. Acad. R.P.R. seria A, 3, (499—506) (1949).
4. Ciorănescu N., Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R. seria A, 1, (535—538) (1949).
5. Devisme I., Bull. dela Soc. Mathem. de France, 61, 26 (1933).
6. Gheorghiu O. Em., Comunicările Acad. R.P.R., 8, (756—760) (1958).
7. Gheorghiu O. Em., Acad. R.P.R. Baza Timişoara seria I, (30 — 31) (1955).
8. Neuhaus N., Matematicki vesnik Belgrad, 4 (19), (379—389) (1967).
9. Neuhaus N., St. cercet. Mat. Bucureşti, 21 (5), (773—791), (1969).
10. Rey Pastor, Boletin Sem. mat. Argentino. Buenos Aires Nr. 4 (1929).
11. Roşculeţ M. N., Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., 5 (1), (135—145), (1953).
12. Roşculeţ M. N., Stud. Cercet. Matem. 7 (1—2), (1956).
13. Roşculeţ M. N., Stud. Cercet. Matem. 6 (1—2), (1955).
14. Schmidt H., Mathem. Zeitschr. Würzburg, 76, (46—50) (1961).
15. Kamke E., *Differentialgleichungen* I. Leipzig, (1962).
16. Van Der Waerden, *Algebra.* Springer-Verlag Berlin (1955).

FUNCŢII CICLICE ŞI SISTEME DIFERENŢIALE LINEARE ASOCIATE LA ALGEBRE DE ORDIN FINIT

(REZUMAT)

Consideraţiile făcute în [8] şi [9] în legătură cu sisteme diferenţiale asociate la o algebră hipercomplexă de ordinul 3 precum şi în legătură cu sisteme asociate la algebre de matrici celulare de ordin oarecare se extind asupra sistemelor diferenţiale asociate la algebre de ordin finit oarecare.

Se generalizează teorema de adiţiune a funcţiilor ciclice [14].

În continuare se tratează sisteme diferenţiale lineare cu coeficienţi variabili. Prin particularizarea acestor sisteme se obţin sisteme lineare cu coeficienţi constanţi.

Soluţia generală a sistemelor tratate se exprimă cu ajutorul funcţiilor ciclice de ordin n (numite şi cosinuşii lui P. Appell).

*) $\overline{\Pi}$ aus (3.17) und (4.4) ist die Menge der Quasidiagonalmatrizen $[A_{a_1}\dots A_{aj}\dots A_{a_s}]$. Die $\overline{A}_{aj}$, $j=1,\dots,s$, sind Zellenmatrizen der Gestalt $\underset{|-}{A_jE_{aj}}+\beta_jH_{aj}$ mit $\beta_j\in R$; $A_j\in\mathfrak{M}_n$; E_{aj}, $H_{aj}\in\mathfrak{Q}_{aj}$.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АССОЦИИРОВАННЫЕ АЛГЕБРАМ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

(РЕЗЮМЕ)

Выводы сделанные в [8] и [9] в связи с дифференциальными системами ассоциированными гиперкомплексной алгебре третьего порядка, а также в связи с системами ассоциированными алгебре ячейных матриц какого либа порядка, распространяется на дифференциальные системы ассоциированные алгебре некоторого конечного порядка.

Обобщается теорема сложения циклических функций [14].

Рассматриваются линейные дифференциальные системы с переменными коэффициентами.

Общее решение рассмотренных систем выражаются при помощи циклических функций n-го порядка (называемых и косинусами Аппеля).

QUANTUM TRANSITIONS CAUSED BY SUPERIMPOSED FIELDS

By

M. BORNEAS

There are situations given in practice when external variable fields are acting successively on a quantum system. In general, we can expect transitions to take place, and changes of the energy spectrum as well. We intend to examine the following simple problem. Find the probability of transition to a certain state, if after the action of a field determining only transitions, follows the action of a field changing the energy spectrum.

Let H^0 be the Hamiltonian of the field in the initial state, with discrete nondegenerate energy spectrum $E_1^0, E_2^0, \ldots E_k^0, \ldots$ The Schrödinger equation is

$$ih \frac{\partial \varphi}{\partial t} = H^0 \varphi. \tag{1}$$

We know the general solution of this equation [1]

$$\varphi = \sum_k a_k^0 \varphi_k = \sum_k a_k^0 \varphi_k^0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_k^0 t\right). \tag{2}$$

After the application of the first field the Hamiltonian becomes $H^0+V(t)$ and the new Schrödinger equation reads

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H^0+V)\,\psi \tag{3}$$

with the general solution

$$\psi = \sum_k a_k(t)\,\varphi_k \tag{4}$$

the coefficients a_k being calculated by well known methods [1].

Further on, at the time τ the second field comes into action, thus the Hamiltonian becomes $H^0+V(t)+W(t)$ and the Schrödinger equation is now

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H^0+V+W)\,\Psi. \tag{5}$$

We put the general solution in a form analogous to (4)

$$\Psi = \sum_k b_k(t)\,\Phi_k(t). \tag{6}$$

The coefficients b_k will give the searched transition probability by the known formula

$$p_{m\to n} = |b_n|^2. \tag{7}$$

In order to find the coefficients we shall proceed as follows. We substitute the expansion (6) into Eq. (5)

$$\sum_k i\hbar \frac{\partial b_k}{\partial t}\Phi_k + \sum_k i\hbar b_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} = \sum_k b_k (H^0+V+W)\Phi_k. \tag{8}$$

Taking the functions Φ_k orthonormated, multiplying to the left by Φ_n^* and integrating we obtain

$$\frac{db_n}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\sum_k b_k\left[\int dx\, \Phi_n^*(H^0+V+W)\,\Phi_k - i\hbar\int dx \Phi_n^* \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}\right]. \tag{9}$$

For the functions Φ_k we choose [2] the expressions

$$\Phi_k(t) = \Phi_k^0(t)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_\tau^t dt\, E_k(t)\right] \tag{10}$$

because the energy spectrum changes with time; here Φ_k^0 are the pseudoeigenfunctions depending on time, corresponding to the E_k values of the energy. Taking into account (10) we can readily write Eq. (9) in the form

$$\frac{db_n}{dt} =$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\sum_k b_k\left[\exp\frac{i}{\hbar}\int_\tau^t dt\,(E_n - E_k)\right]\int dx\left[\Phi_n^{0*}(H^0+V+W-E_k)\,\Phi_k^0 - i\hbar\,\Phi_n^{0*}\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial t}\right]. \tag{11}$$

It can be seen at once that if W did not determine changes of the energy spectrum, Φ_k^0 would become constant equal to φ_k^0, thus the term ni $\partial\Phi_k^0/\partial t$ would disappear, the terms in H^0 and E_k would reduce, and we would get the well known equation [1].

In Eq. (11) the functions Φ_k^0 being generally different from φ_k^0, they will be calculated, together with E_k, by different methods, as for instance: writing down the equation for instantaneous eigenvalues [2], or utilizing the method of Heinrichs [3].

In order to solve the equation (11) we put

$$b_k = b_k^0 + b_k^1 + b_k^2 + \ldots \tag{12}$$

where b_k^0 are the values of the coefficients in the approximation when $W=0$. Then Ψ becomes ψ and the expansion (6) reduces to

$$\Psi = \psi = \sum_k b_k^0 \varphi_k. \tag{13}$$

Compared to (4) one can see that $b_k^0 = a_k$. But on the other hand

$$a_k = a_k^0 + a_k^1 + a_k^2 + \ldots \tag{14}$$

If we stop at the first approximation the derivative from (11) may be written

$$\frac{d}{dt}(a_n^0 + a_n^1 + b_n^1) = \frac{da_n^1}{dt} + \frac{db_n^1}{dt}. \tag{15}$$

Considering that at the beginning the system was in the state m it follows $a_k^0 = \delta_{km}$. Then substituting (15) into Eq. (11), keeping the small quantities of first order only, and maintaining the adiabatic limits, we obtain

$$\frac{da_n^1}{dt} + \frac{db_n^1}{dt} =$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\left[\exp\frac{t}{\hbar}\int_\tau^t dt\,(E_n - E_m)\right]\int dx\left[\Phi_n^{0*}(H^0 + V + W - E_m)\Phi_m^0 - i\hbar\Phi_n^{0*}\frac{\partial\Phi_m^0}{\partial t}\right]. \tag{16}$$

All quantities being known except b_n^1, Eq. (16) can be solved by integration. Superior approximations may be calculated in the same way.

REFERENCES

1. D. I. Blohintsev, *Bazele mecanicii cuantice* (translated from russian), Ed. tehn., București 1954.
2. L. Schiff, *Quantum Mechanics*, Mc. Graw-Hill Book Company, 3-rd edition, 1968.
3. J. Heinrichs, Phys. Rev., **172**, 1315 (1968), **176**, 2168 (1968).

TRANZACȚII CUANTICE PRODUSE DE CIMPURI SUPRAPUSE

(REZUMAT)

Se consideră un sistem cuantic asupra căruia acționează în primul rînd un cîmp care determină tranziții între nivelele sale energetice, apoi în al doilea rînd un cîmp care determină și o schimbare a spectrului energetic.

Pentru dezvoltarea ecuației finale se alege o soluție generală de forma $\Psi = \sum_k b_k(t)\,\Phi_k(t)$, unde Φ_k sînt funcții de forma $\Phi_k = \Phi_k^0(t)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_\tau^{t'} dt\,E_k(t)\right]$. Aflarea funcțiilor $\Phi_k^0(t)$ dintr-o ecuație în care intră al doilea cîmp dar nu și primul, permite stabilirea relațiilor ce determină coeficienții $b_k(t)$.

КВАНТОВЫЕ ТРАНЗИЦИИ НАКЛАДНЫХ ПОЛЕЙ

(РЕЗЮМЕ)

Рассматривается квантовая система на которую воздействует в первую очередь поле определяющее транзиции между своими энергетическими уравнями, а во вторых, поле определяющее и изменение энергетического спектра.

Для развития конечного уравнения выбирается общее решение вида $\Psi=\sum b_k(t)\Phi_k(t)$, где Φ_k функции вида $\Phi_k(t)=\Phi_k^0(t)\exp\left[-(i/\hbar)\int_\tau^{t'} dt\, E_k(t)\right]$.

Нахождение функции $\Phi_k^0(t)$ из уравнения в которое входит второе поле, но не первое, позволяет установить соотношения определяющие коэффициенты $b_k(t)$.

DIE ABHÄNGIGKEIT DER MAGNETISCHEN STRUKTUR VON DEN WERTEN DER MAKROSKOPISCHEN PARAMETER BEI ELEKROLYTISCHEN NI—CO-SCHICHTEN

VON

COLETTA DE SABATA, I. MIHALCA, DOROTHEA MIHAILOVICI, M. CHIVU

1. EINLEITUNG

In früheren Arbeiten [1], [2], [3] wurden elektrolytische Ni-, Co- und Ni—Co-Schichten verfolgt, wobei man die Veränderungen der magnetischen Struktur in Abhängigkeit von zwei Parametern untersuchte, und zwar : die Legierungszusammensetzung und die Wirkung eines Magnetfeldes während der Elektrolyse. Um die magnetische Struktur nachzuweisen wurde die Bitterstreifentechnik angewendet.

Die Ni—Co—Legierung, die bisher wenig untersucht wurde, besitzt eine einfache magnetische Struktur, die den Stoffen mit einachsiger Anisotropie typisch ist. Die Schicht enthält Hauptbezirke von 180° und Abschlußbezirke von 90°, wie sie in Abb. 1 für eine Ni—Co-Probe dargestellt sind.

Die Anwesenheit eines zur Schichtoberfläche parallelen Magnetfeldes, während der Elektrolyse, ruft keine Veränderungen der Struktur hervor. In diesem Falle wird die Oberfläche der Hauptbezirke vergrössert und die einachsige Anisotropie des Stoffes verstärkt. Wenn das Feld senkrecht zur Oberfläche steht, erscheint eine wellenartige Struktur, die als Folge einer Rotation der Spinrichtung in die Feldrichtung aufgefasst werden kann [4], [5], [6].

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, in welcher Weise ein äusseres Magnetfeld, das während der Elektrolyse einwirkt, die makroskopischen Parameter, die die Ni—Co-Schichten charakterisieren, beeinflusst.

Abb. 1. Durch Bitterstreifen nachgewiesene Magnetisierungsbezirke. (Ni—Co-Probe, d=3,28 μm)

2. EXPERIMENTELLE ERGEBNISSE

Die elektrolytischen N – rCo-Schichten wurden auf Kupferhohlzylinde' r_i=8,9 mm, r_e=9,5 mm, h=8,9 mm niedergeschlagen.

Die Niederschlagsbedingungen wurden in [3] beschrieben. Der Kobaltgehalt betrug weniger als 20%. Die Schichtdicke war 6,5 μm, also grösser als 1 μm, der als Trennungswert zwischen dünnen und dicken Schichten angenommen wird.

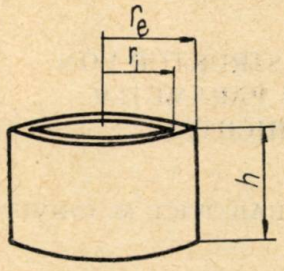

Abb. 2. Die Probenausmasse.

Die Herstellung der Proben erfolgte in Abwesenheit und in Anwesenheit eines äusseren Magnetfeldes, dass entweder parallel zur Erzeugenden der Probe mit einer Feldstärke von 1 400 A/m oder konzentrisch mit der Probe und einer Feldstärke von 187 A/m war.

Es wurden die Hysteresisschleifen und Magnetisierungskurven im quasistatischen Regime (mit der Methode des ballistischen Galvanometers) und im dynamischen Regime (indem eine elektronische Integrierungsschaltung und ein Oszilloskop verwendet wurden) mit einer Frequenz von 50 Hz dargestellt, die in Abb. 3, 4, 5, 6 für folgende Proben

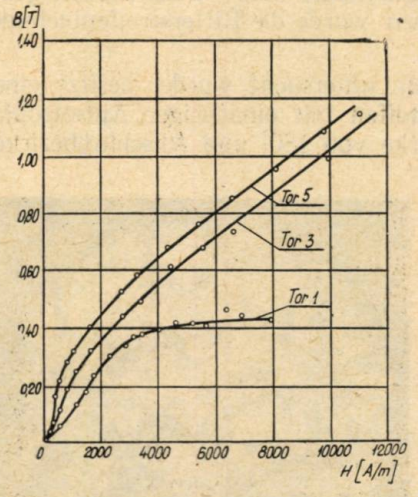

Abb. 3. Magnetisierungskurve $B=f(H)$.

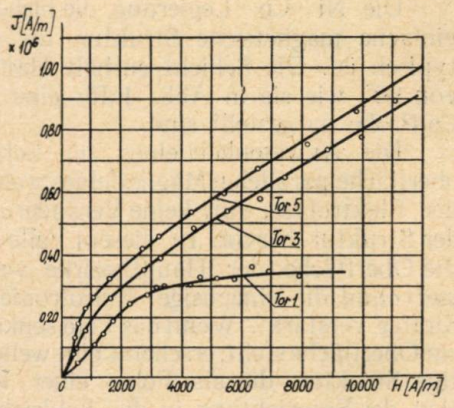

Abb. 4. Magnetisierungskurve $J=f(H)$.

T-1 (bei H=0)

T-3 (bei H=1 400 A/m)

T-5 (bei H=187 A/m niedergeschlagen),

wiedergegeben sind.

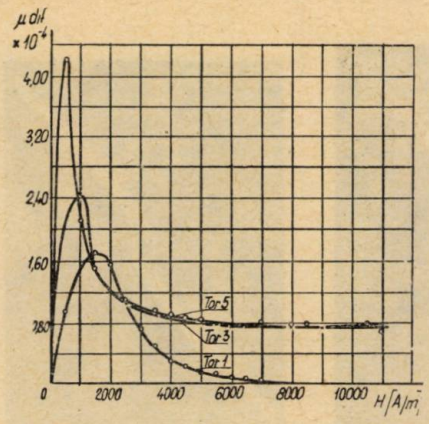

Abb. 5. Die relative magnetische Permeabilität $\mu_{rel} = f(H)$.

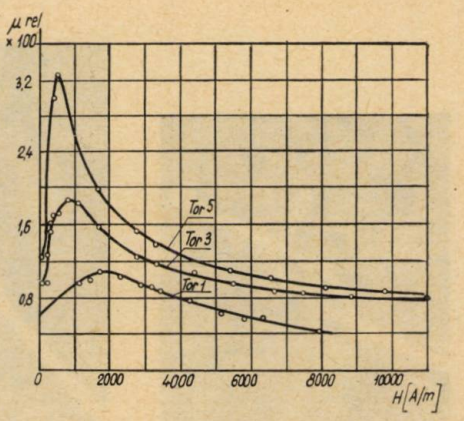

Abb. 6. Die differentielle magnetische Permeabilität $\mu_{dif} = f(H)$.

Aus Abbildungen 3 und 4 folgt:

a) die Anwesenheit eines äusseren Magnetfeldes während der Elektrolyse verändert die Magnetisierungskurve. Für T-1 wurde die Sättigungsinduktion $B_s = 0{,}45$ T bei $H_s = 7\,000$ A/m erreicht, während sie für T-3 und T-5 nicht einmal für den doppelten Wert des Feldes erreicht werden konnte. Dabei erhielt die Induktion den Wert von 1,2 T.

Die zwei Kurven, $B = f(H)$, im Bereiche der Magnetfelder von $H = 2\,000$ A/m und $H = 12\,000$ A/m, besitzen eine lineare Abhängigkeit und dieselbe Neigung;

b) die Kurven der Proben T-3 und T-5 zeigen, dass die, den irreversiblen Wandverschiebungen entsprechende Zone — die zwischen der unteren und oberen Biegung der Kurve eingeschlossen ist — ein ausgeprägtes Anwachsen aufweist, vor allem für Probe T-5.

Dieses — einem Monokristall ähnliches — Verhalten beweist, dass in der Probe wenig grosse Bezirke existieren, die durch Blochwände getrennt sind und die nicht durch die Störungsstellen zurückgehalten werden. In [3] wurde gezeigt, dass die Anwesenheit eines Magnetfeldes während der Elektrolyse, dessen Stärke kleiner als die Koerzitivkraft ist, eine Vergrösserung der Hauptbezirke von 180° verursacht. Gleichzeitig kommen keine Störungen vor, wenn das Feld zur Schicht parallel ist.

Nachdem man den oberen Kurvenast, wo die Magnetisierung durch Rotation verursacht wird (also bei etwa 1 000 A/m) durchläuft, zeigt der Stoff wieder eine lineare Abhängigkeit $J = f(H)$, was von Neuem Wandverschiebungen voraussetzen lässt.

Dies erlaubt anzunehmen, dass im Stoff zwei Arten von magnetischen Strukturen existieren und zwar eine bei schwachen Feldern und eine bei Veränderung der Magnetisierung in hohen Magnetfeldern. Die Hysteresisschleifen aus Abb. 7, 8 und 9, die im dynamischen Regime hergestellt wurden, bestätigen unsere Annahmen, wonach die Magnetisierungsverluste in der Zone starker Felder vernachlässbar sind, so dass die zwei Äste übereinanderlappen.

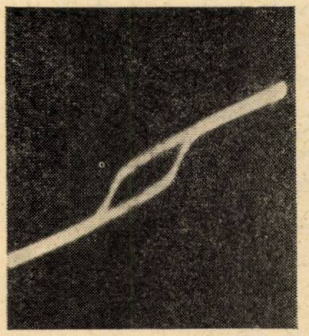

Abb. 7. Hysteresisschleife im dynamischen Regime (Probe T-1)

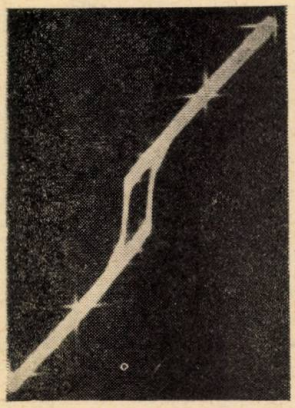

Abb. 8. Hysteresisschleife im dynamischen Regime (Probe T-3).

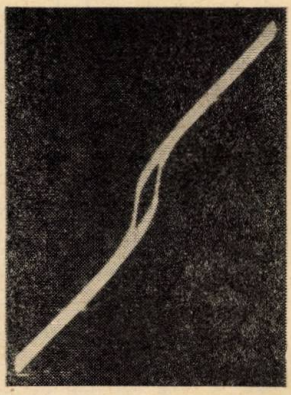

Abb. 9. Hysteresisschleife im dynamischen Regime (Probe T-5).

Die Neigungsdifferenz der Kurven $J=f(H)$ für die beiden linearen Zonen zeigt, dass die Magnetisierung der zweiten Zone stufenweise verändert wird. Dies bedeutet, dass die Wandverschiebungen quasireversibel sind.

In Abb. 10, 11 und 12 wurden die Hysteresisschleifen der Proben T-1, T-3 und T-5 im quasistatischen Regime dargestellt.

Aus Abbildungen 5 und 6 ergibt sich:

— Die Anfangs-, Maximal- und Sättigungswerte der relativen magnetischen Permeabilität einer Probe, welche durch Elektrolyse bei Anwesenheit eines Magnetfeldes hergestellt wurde, vergrössern sich.

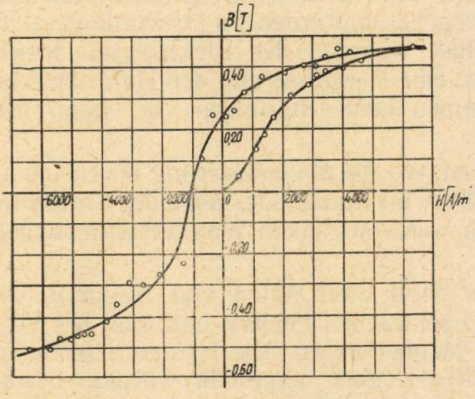

Abb. 10. Hysteresisschleife im quasistatischen Regime (Probe T-1).

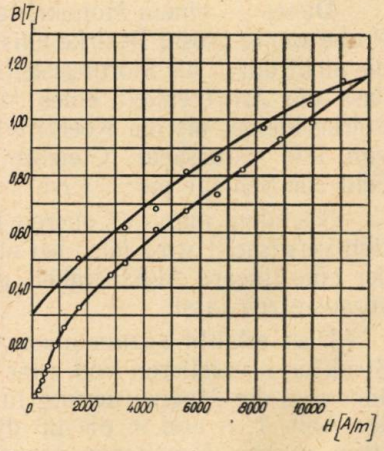

Fig. 11. Hysteresisschleife im quasistatischen Regime (Probe T-3).

— Der maximale Wert der Permeabilität erscheint für immer kleinere Werte des angelegten Magnetfeldes. Die Werte zeigen eine ausgeprägte Veränderung:

Probe	μ_{rel} max	μ_{rel} Anf	μ_{rel} Sätt
T-1	110	60	40
T-3	185	100	80
T-5	325	125	90

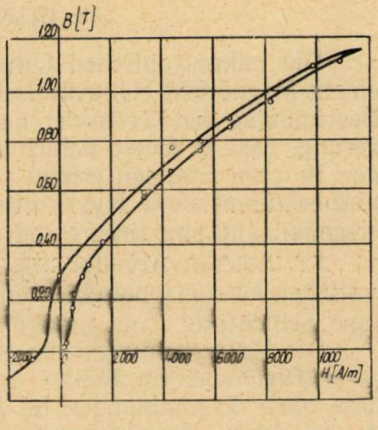

Abb. 12. Hysteresisschleife im quasistatischen Regime (Probe *T*-5).

Die differentielle Permeabilität der Proben, die im Magnetfeld niedergeschlagen wurden, bleibt in weiten Grenzen der Feldstärke und zwar, zwischen 5 000 und 12 000 A/m, konstant. Daher kann man annehmen der Stoff bewahrt seine Ummagnetisierungseigenschaften in einem breiten Intervall.

Bemerkung: Die im quasistatischen Regime aufgenommene Hysterisisschleife weis sehr viele Schwierigkeiten in bezug auf die Empfindlichkeit der Messanordnung auf, so dass die experimentellen Punkte mit grossen Fehlern behaftet sind. Darum wurden die Proben auch im dynamischen Regime untersucht. Wie ersichtlich, stimmen die mit beiden Methoden aufgenommenen Kurven aberein.

Die Eigenschaften der ferromagnetischen Schichten der zwei Proben *T*-3 und *T*-5 sind ähnlich, obwohl sie in verschiedenen Feldern mit einem Feldstärkenverhältnis von 1 400 : 187 ≅ 7,5, hergestellt wurden und die Richtung des Feldes während des Niederschlages entweder senkrecht oder parallel zum magnetisierenden Feld während der Messungen war.

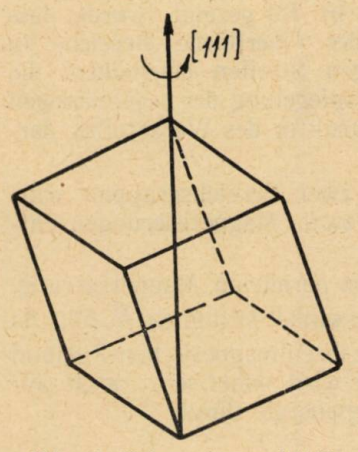

Abb. 13. Kubus, dessen [*111*] — Achse senkrecht zu der Schichtoberfläche steht.

Das elektrolytische Niederschlagen einer ferromagnetischen Schicht in einem Magnetfeld, bewirkt eine kristallografische Textur [7], [8], wobei die [*111*] - Achsen senkrecht auf die Schichtoberfläche stehen. Die schweren Magnetisierungsrichtungen welche sich nach den Kubusseiten ausrichten, werden zur Schichtoberfläche symetrisch sein, wenn die [*111*] - Achse ihre Normale darstellt (Abb. 13).

Dies führt zu einer regelmässigen statistischen Verteilung der magnetischen Eigenschaften in der Schichtebene, da die zwei senkrechten Richtungen (die nach der Erzeugenden und die kreisförmige) äquivalent in bezug auf die Verteilung der Achsen sind.

3. DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Die mikroskopischen Untersuchungen der magnetischen Struktur der in einem Magnetfeld elektrolytisch niedergeschlagenen Ni—Co-Schichten und die Bestimmung der Werte der makroskopischen Parameter führt zur Schlussfolgerung, dass in diesen Schichten die Veränderung des magnetischen Zustandes in zwei Etappen erfolgt : die erste erscheint in schwachen Magnetfeldern und bestimmt steile Hysteresisschleifen während die zweite in starken Feldern erscheint und eine lineare und quasireversible Abhängigkeit $J=f(H)$ aufweist.

In früheren Arbeiten [9], [10], [11] wurde behauptet, dass die elektrolytischen Ferromagnetschichten eine lamellare Struktur besitzen. Diese spontane Schichtung kann man durch verschiedene Methoden nachweisen.

Die Untersuchungen der elektrolytischen Ni—Fe-Schichten [9], [12], [13], deren Eigenschaften ähnlich mit jener der Ni—Co-Schichten sind [14], zeigen, dass diese Erscheinungen im Falle der Rotationshysteresis in zwei Etappen dargestellt werden können :

a) in schwachen Feldern existiert eine einzige Mittelrichtung für den Sprung der spontanen Magnetisierung in die Feldrichtung $\overline{H}$;

b) in hohen Feldern erscheinen zwei Mittelrichtungen für die Sprünge der spontanen Magnetisierung (Abb. 14).

Die thermodynamischen Betrachtungen hatten eine Erklärung dieser Ergebnisse mit Hilfe der Existenz einer spontanen Schichtung in parallele Lamellen, die antiparallel magnetisiert sind, erlaubt [9].

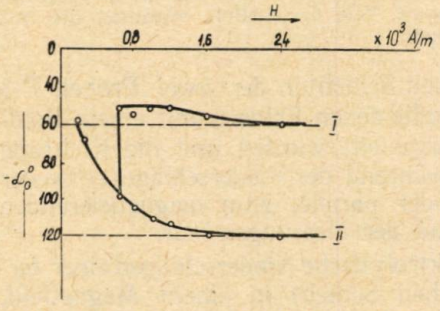

Abb. 14. Die Abhängigkeit des mittleren Wertes des Winkels eines Sprunges des spontanen Magnetisierungvektors bei Rotationshysteresis (an Ni—Fe - Schichten).

Es wird angenommen, dass der Verlauf der Hysteresisschleife in dynamischem Regime mit Hilfe des gleichen Modells für die innere Magnetstruktur interpretiert werden kann, da vor allem in [3] gezeigt wurde, dass auch an der Oberfläche Bereiche in regelmässigen Streifen erscheinen, die eine Widerspiegelung der regelmässigen internen Struktur des Werkstoffes darstellt.

Diese zwei Bereichsgruppen würden dann zwei Magnetisierungen entsprechen :

a) einer zum Feld $\overline{H}$ während der Messungen parallelen Magnetisierung. Die Bereiche besitzen einen bestimmten Streuungswinkel bezüglich $\overline{H}$ [9], da aber ihre Richtungen nahe zu $\overline{H}$ liegen, werden sie ihren magnetischen Zustand sehr leicht ändern und die Magnetisierungsstärke wird daher sehr rasch anwachsen. In diesem Fall wird die Wechselwirkungsenergie durch

$$W_m \underset{\uparrow\uparrow}{=} -(\overline{J} \cdot \overline{H})$$

gegeben.

b) Mit einer zum angewendeten Magnetfeld antiparallelen Magnetisierung. Hier wird die Wechselwirkungsenergie durch

$$W_m = -(\bar{H} \cdot \bar{J}) \cong 2 \cdot W_m$$
$$\downarrow\uparrow \qquad\qquad \uparrow\uparrow$$

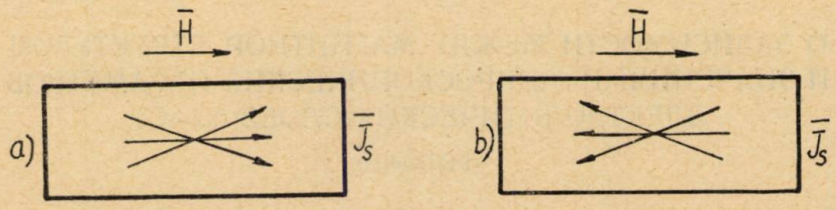

Abb. 15.

ausgedrückt. Wie ersichtlich ist der Wert doppelt so gross als im vorhergehenden Fall. Die Umorientierung der Magnetisierung erfordert viel grössere Energiewerte, während die Neigung der Kurven viel kleiner wird.

LITERATURVERZEICHNIS

1. A. Cişman, C. De Sabata, I. Mihalca, I. Muşcutar, Analen der Univ. Timişoara, Serie St. Fiz-Chim., Vol. VII, Fasc. 1, 1969.
2. C. De Sabata, I. Muşcutar, I. Mihalca, D. Mihailovici, Analen der Univ. Timişoara, Serie St. Fiz-Chim., Vol. VII, Fasc. 1,1969.
3. C. De Sabata, I. Muşcutar, I. Mihalca, D. Mihailovici, Rev. Roum. de Phys., T. 15, Nr. 7, Bukarest 1970.
4. I. Bursuc, M. Suciu, *Pături subțiri feromagnetice*, Ed. Acad. R.S.R., Bukarest 1969.
5. E. H. Frei, S. Shtrikman, D. Treves, Phys. Rev., **106**, 446, 1957.
6. A. Aharoni, S. Shtrikman, Phys. Rev., **109**, 1522, 1958.
7. J. S. Judge, J. R. Morrison, D. E. Speliotis, J. Appl. Phys., 36, 948, 1965.
8. N. A. Korenev, I. A. N. UdSSR, Serie fiziceskaia, T. XXIX, Nr.4, 650, 1965.
9. C. De Sabata, Teză de doctorat, Inst. politehnic, Jassy, 1966.
10. A. Cişman, Rev. Roum. de Phys., T. 12, Nr.1, 1969.
11. A. Cişman, A. Munteanu, A. Schiff, Rev. Roum. de Phys., T. 9, Nr.9, Bukarest 1964.
12. C. De Sabata, Stud. şi cerc. de fiz., T. 22, Nr.9, 1970.
13. C. De Sabata, V. Petrescu, St. şi cerc. fiz., **18**, 3, 235, 1966.
14. M. Prutton, *Thin ferromagnetic films*, Ed. Butterworths, London 1964.

ASUPRA DEPENDENȚEI DINTRE STRUCTURA MAGNETICĂ ȘI VALORILE PARAMETRILOR MACROSCOPICI LA PĂTURI ELECTROLITICE DE Ni—Co

(REZUMAT)

În lucrare se determină valorile parametrilor macroscopici ai principalelor mărimi magnetice pentru pături de Ni—Co ($B=f(H)$, $J=f(H)$, $\mu_{rel}=f(H)$, $\mu_{dif}=f(H)$ și se ridică curbele de histereză în regim cvasistatic și dinamic.

Păturile au fost realizate electrolitic în absența sau în prezența unui cîmp magnetic, condiție care modifică caracteristicile magnetice ale materialului.

Se propune o interpretare a rezultatelor ținînd seama de structura magnetică a acestor pături și de o stratificare în lamele magnetizate antiparalel.

О ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ МАГНИТНОЙ СТРУКТУРОЙ И ЗНАЧЕНИЯМИ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКИХ СЛОЕВ Ni—Co

(РЕЗЮМЕ)

В работе определяются значения микроскопических параметров главных магнитных величин для слоев Ni—Co ($B=f(H)$, $J=f(H)$, $\mu_{rel}=f(H)$, $\mu_{dif}=f(H)$) и строятся кривые гистерезы в квазистатическом и динамическом режимах.

Слои осуществлялись электролитическим путем в отсутствии и присутствии магнитного поля, что изменяет магнитные характеристики материала.

Предлагается анализировать результаты учитывая магнитную структуру этих слоев и стратификацию по противопараллельно магнетизированным пластинкам.

LAMINAR SLIP-FLOW THROUGH A UNIFORM CIRCULAR PIPE WITH SMALL SECTION

By

V. M. SOUNDALGEKAR and V. G. DIVEKAR

1. INTRODUCTION.

Choudhary and Sinha (1964) presented an analysis of the flow of a viscous, incompressible fluid through a circular pipe of uniform cross-section with small uniform suction under the assumption that the pressure is uniform over a cross-section and that the axial pressure gradient is also uniform throughout the channel. This assumption is not correct as due to uniform small suction, there must occur a change in the pressure gradient along the axis of the pipe. This problem was again attempted by Bansal (1966) in his recent paper and he modified this assumption on the pressure gradient. The laminar flow in a porous pipe was also attempted by Yuan and Finkelstein (1956) under the assumption that the maximum velocity of the Hagen-Poiseuille flow occurs at the centre of the mouth of the pipe. Their treatment of the problem was in terms of a stream function. By following a method of perturbation, Bansal (1966) showed that at the entrance of the pipe, the pressure gradient along the axis is different from the one in the Poiseulle flow.

A similar problem was also attempted by Varma and Bansal (1966) in case of flow between two parallel plates in relative motion with suction at stationary plate wherein they again modified the problem of Sinha and Choudhary (1965). In these papers, a continuum flow under no-slip boundary conditions was assumed. However, when the fluid is flowing at high temperature or low pressure, there is slight reduction in the density of the fluid, Under these conditions, though the fluid medium is in continuum state, it has been observed that no-slip boundary conditions do not help us to describe the motion. Hence the first order velocity slip boundary conditions along with the momentum equations of continuous gas dynamics are suggested, the details about which are described by Schaaf and Chambre' (1958).

The object of the present paper is to study the modifications due to introduction of first order velocity slip boundary conditions. Such an attempt was made earlier by Soundalgekar and Divekar (to be published) to study the Couette flow with suction at the stationary plate. It was observed that due

to rarefaction there is a decrease in the axial pressure and the shearing stress at the stationary plate. Also, initially there is an increase in the flow rate, but far downstream, it decreases due to rarefaction.

In section 2, the two-dimensional flow is described by taking Navier-Stokes equations in polar co-ordinates. They are non-dimensionalised and solved by perturbation method. The solutions are presented for the axial and radial velocities to $0(\lambda^2)$, where λ is the suction Reynolds number assumed $\ll$ unity. Also expressions for the axial pressure drop, skin-friction and mass flow coefficient are derived to $0(\lambda^2)$. They are shown graphically for different values of λ, h_1, the rarefaction parameter, Re, the Reynolds number.

In section 3, the effects of rarefaction on the flow-field are discussed in detail

2. MATHEMATICAL ANALYSIS:

The two dimensional flow is assumed to be governed by the continuum form of the momentum equations which in cylindrical polar co-ordinates are

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \tag{1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right] \tag{2}$$

the equation of continuity is

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}=0\,. \tag{3}$$

Here the x-axis is chosen along the axis of the pipe and r is measured at right angles to it.

The first-order slip-flow boundary condition which permits a slip velocity u_s at the wall $(r=R)$ is

$$\left.\begin{aligned} &u=-\zeta_u\frac{\partial u}{\partial r},\ v=v_0 \text{ at } r=R\\ &\frac{\partial u}{\partial r}=0,\qquad v=0 \text{ at } r=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

According to Maxwell, the slip coefficient ζ_u is given by

$$\zeta_u=\frac{2-f^*}{f^*}\lambda^*$$

where λ^* is the mean free path and f^* is termed Maxwell's reflection coefficient. Thus ζ_u depends upon f^* and λ^*. According to table (10.1) of Eckert and Drake (1959), f^* values for a wide variety of gas surface combinations

fall between 0.9 and 1.0 with perhaps more lying closer to 1. For $f^* \cong 1$, it follows that $\zeta_u \cong \lambda^*$. The mean free path λ^* can be expressed in terms of thermodynamic variables by utilising equation (10.23) of Eckert and Drake (1959). Thus

$$\lambda^* = \frac{\sqrt{\pi/8}}{0.499} \frac{\mu}{P} \sqrt{RT} \tag{5}$$

If uniform suction is assumed at the boundary, then we have

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

which lead to v a function of r only. Hence from (3) and (6) equations (1) and (2) reduce to the following.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \tag{7}$$

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right] \tag{8}$$

We now introduce the following non-dimensional quantities:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u} = u/u_m, \quad \bar{v} = v/v_0 \\ &\bar{x} = x/R, \quad \eta = r/R \\ &\bar{p} = p/\rho U_m^2 \\ &\lambda = v_0 R/\nu \quad \text{Suction Reynolds number} \\ &\mathrm{Re} = \frac{U_m R}{\nu}, \quad \text{Reynolds number} \\ &h_1 = \frac{\zeta_u}{R}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Here v_0 is the uniform suction velocity and U_m is the maximum velocity of the Poiseuille slip-flow in the absence of suction.

In view of (9), equations (7), (8) and (3) reduce to the following non-dimensional form.

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda}{\mathrm{Re}} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right) \tag{10}$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = -\frac{\mathrm{Re}^2}{\lambda^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} - \frac{\bar{v}}{\eta^2} \right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\bar{v}}{\eta} \right) = 0 \tag{12}$$

and the boundary conditions (4) reduce to

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= -h_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}, \quad \bar{v} = 1 \text{ at } \eta = 1 ; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} &= 0, \qquad \bar{v} = 0 \text{ at } \eta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

We represent the perturbations caused by the suction in the following way :

$$\bar{p}(\bar{x}, \eta) = P_0 + p'(\bar{x}, \eta) ; \; \bar{u}(\bar{x}, \eta) = u_0 + u'(\bar{x}, \eta) ; \; \bar{v} = v'(\eta) \tag{14}$$

Here P_0 and u_0 are the known quantities for the flow without suction which is described in Sparrow and Lin (1962). They satisfy the following relations.

$$\frac{\partial p_0}{\partial \eta} = 0, \; \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} = 0 \text{ and } \frac{\partial p_0}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) \tag{15}$$

Here P_0 is independant of η and u_0 is given by

$$u_0 = 1 - \eta^2 / (1 + 2h_1) \tag{16}$$

We now substitute (14) in (10), (11) and (12) and we obtain in view of (15),

$$u_0 \frac{\partial u'}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda}{\mathrm{Re}} v' \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + u' \frac{\partial u'}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda}{\mathrm{Re}} v' \frac{\partial u'}{\partial \eta} = - \frac{\partial p'}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right] \tag{17}$$

$$v' \frac{\partial v'}{\partial \eta} = - \frac{\mathrm{Re}^2}{\lambda^2} \frac{\partial p'}{\partial \eta} + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial^2 v'}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} - \frac{v'}{\eta^2} \right] \tag{18}$$

and

$$\frac{\partial u'}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{v'}{\eta} \right) = 0 \tag{19}$$

and the boundary conditions on the perturbed quantities are

$$u'(1) = -h_1 \left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}, \quad v'(1) = 1 ; \quad \left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad v'(0) = 0 \tag{20}$$

To solve the non-linear equations (17) and (18), we follow the perturbation method.

Assume

$$v' = \frac{1}{\eta} f(\eta) \tag{21}$$

the function $f(\eta)$ is to be chosen in such a way that $\mathrm{Lt}\,(f(\eta)/\eta) \to 0$ as $\eta \to 0$ Then from (19) and (21), we get

$$u' = - \frac{\lambda}{\mathrm{Re}} \bar{x} \frac{1}{\eta} f'(\eta) + F(\eta) \tag{22}$$

where $f(\eta)$ and $F(\eta)$ are the unknown functions to be determined.

Substituting (21) and (22) in (17) and (18) there follows,

$$\frac{\partial p'}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[F'' + \frac{1}{\eta}F' + \frac{\lambda}{\eta}\left\{\left(1-\frac{\eta^2}{1+2h_1}\right)f + \frac{2}{1+2h_1}\eta f + Ff' - fF'\right\}\right]$$

$$-\frac{\lambda}{\mathrm{Re}^2}\bar{x}\frac{1}{\eta^3}\left[\eta^2 f''' - \eta f'' + f' + \lambda(\eta f'^2 - \eta f f'' + f f')\right]$$

and

$$\frac{\partial p'}{\partial \eta} = \frac{\lambda}{\mathrm{Re}^2}\frac{1}{\eta^3}\left[\eta^2 f'' - \eta f' - \lambda(\eta f f' - f^2)\right]. \tag{24}$$

Following Bansal (1966), we assume that at

$$\bar{x}=0, \quad \frac{\partial p'}{\partial \bar{x}}=0 \tag{25}$$

which means that the perturbed pressure gradient is zero at the mouth of the channel. Hence from (25) and (23), we obtain

$$F'' + \frac{1}{\eta}F' + \frac{\lambda}{\eta}\left\{\left(1-\frac{\eta^2}{1+2h_1}\right)f' + \frac{2}{1+2h_1}\eta f + Ff' - fF'\right\}=0 \tag{26}$$

From (24), we get after differerentiation with respect to $\bar{x}$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}\partial \eta}=0 \tag{27}$$

We differentiate (23) with respect to η and we obtain in view of (26) and (27).

$$\frac{d}{d\eta}\left\{\frac{1}{\eta^3}\left[\eta^2 f''' - \eta f'' + f' + \lambda(\eta f'^2 - \eta f f'' + f f')\right]\right\}=0 \tag{28}$$

which is true for all $\bar{x}$.

On integrating (28), we get

$$\eta^3 f''' - \eta^2 f'' + \eta f' + \lambda(\eta^2 f'^2 - \eta^2 f f'' + \eta f f') = C\eta^4 \tag{29}$$

where C is the constant of integration to be determined.

We now solve equations (26) and (29) under the following boundary conditions:

$$f(1)=1, \quad f'(1)=\frac{h_1}{h_1-1}f''(1), \quad F(1)=\frac{h_1}{h_1-1}F'(1)$$

$$f(0)=0, \quad \lim_{\eta\to 0}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{f'(\eta)}{\eta}\right)=0, \quad F'(0)=0 \tag{30}$$

To solve the two coupled equations (26) and (29), we follow the method of perturbation. We expand f and C in powers of λ about $\lambda=0$ where λ is the suction Reynolds number assumed less than unity. Thus

$$f=f_0+\lambda f_1+\lambda^2 f_2+\ldots+\lambda^n f_n \tag{31}$$

$$C=C_0+\lambda C_1+\lambda^2 C_2+\ldots+\lambda^n C_n \tag{32}$$

where $f_n's$ and $C_n's$ are assumed to be independent of λ.

We now substitute equations (31) and (32) in (29) and equate the coefficients of like powers of λ. This leads to the following system of equations:

$$\eta^3 f_0'''-\eta^2 f_0''+\eta f_0'=C_0\eta^4 \tag{33}$$

$$\eta^3 f_1'''-\eta^2 f_1''+\eta f_1'+\eta^2 f_0'^2-\eta^2 f_0 f_0''+\eta f_0 f_0'=C_1\eta^4 \tag{34}$$

$$\eta^3 f_2'''-\eta^2 f_2''+\eta f_2'+2\eta^2 f_0' f_1'-\eta^2 f_1 f_0''-\eta^2 f_0 f_1''+\eta f_1 f_0'+\eta f_0 f_1'=C_2\eta^4 \tag{35}$$

From (30), (31) the boundary conditions on $f_n s$ are now given as

$$\left.\begin{aligned} &f_n(0)=0,\quad f_n'(1)=\frac{h_1}{h_1-1}\ f_n''(1),\quad \operatorname*{Lt}_{\eta\to 0}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{f_n'}{\eta}\right)=0 \quad \text{for } n\geqslant 0 \\ \text{and}\quad &f_0(1)=1,\ f_n(1)=0 \quad \text{for } n\geqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Solving equations (33), (34) and (35) under the boundary conditions (36), substituting in (31) and (32) we get the solution for f to $0(\lambda^2)$ as

$$\begin{aligned} f(\eta)=&\frac{2(1+2h_1)}{1+4h_1}\eta^2-\frac{1}{1+4h_1}\eta^4+\lambda\left\{\frac{1+6h_1}{9(1+4h_1)^2}\eta^2-\right. \\ &-\frac{1}{4(1+4h_1)}\eta^4+\frac{1+2h_1}{6(1+4h_1)^2}\eta^6-\left.\frac{1}{36(1+4h_1)^2}\eta^8\right\}+ \\ &+\lambda^2\left\{\frac{166+2\,324h_1+10\,080h_1^2+14\,400h_1^3}{5\,400(1+4h_1)^4}\eta^2-\right. \\ &-\frac{19+288h_1+870h_1^2+1080h_1^3}{270(1+4h_1)^4}\eta^4+\frac{11+66h_1+72h_1^2}{216(1+4h_1)^3}\eta^6- \\ &\left.-\frac{1}{72(1+4h_1)^2}\eta^8+\frac{1+2h_1}{360(1+4h_1)^3}\eta^{10}-\frac{1}{5400(1+4h_1)^3}\eta^{12}\right\} \end{aligned} \tag{37}$$

and

$$C=-\frac{16}{1+4h_1}+\frac{4(3+12h+16h_1^2)}{(1+4h_1)^2}\lambda+\frac{8(11+132h_1+450h_1^2+360h_1^3)}{135(1+4h_1)^4}\lambda^2. \tag{38}$$

Following Bansal (1966), we now assume the solution for F in the form.

$$F(\eta)=-\left(1-\frac{\eta^2}{1+2h_1}\right)+\frac{\Phi(\eta)}{\eta} \tag{39}$$

where the boundary conditions on Φ are

$$\Phi(1)=\frac{h_1}{h_1-1}\Phi'(1),\quad \operatorname*{Lt}_{\eta\to 0}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\Phi(\eta)}{\eta}\right)=0. \tag{40}$$

From (39) and (26), we get

$$\frac{4}{1+2h_1}\eta^3+\eta^2\Phi''-\eta\Phi'+\Phi+\lambda\left[\eta\Phi f'-\eta\Phi' f+\Phi f\right]=0 \tag{41}$$

From (29) and (41), we can show that

$$\Phi(\eta)=-\frac{4}{(1+2h_1)\,C}f'(\eta). \tag{42}$$

Thus (39) and (42) now lead to

$$F(\eta)=-\left(1-\frac{\eta^2}{1+2h_1}\right)-\frac{4}{(1+2h_1)\,C}\,\frac{f'(\eta)}{\eta} \tag{43}$$

Knowing $f(\eta)$ and $F(\eta)$, we now obtain the expression for axial pressure gradient from (14), (15), (23), (26) and (29) as

$$-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}=\frac{4}{(1+2h_1)\,\mathrm{Re}}+\frac{\lambda\bar{x}}{\mathrm{Re}^2}C \tag{44}$$

where C is given by (38).

We can now write from the equations (14), (16), (21), (22), (37), (39) and (44) the axial and radial components of the velocity in the form

$$\bar{u}=\frac{\mathrm{Re}}{C}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}\frac{f'(\eta)}{\eta};\quad \bar{v}=\frac{f(\eta)}{\eta} \tag{45), (46}$$

where $f'(\eta)$ and $\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}$ can be obtained from (37) and (44) respectively.

We now derive the pressure distribution in the axial and the radial directions by substituting (26) and (29) in (23) and (24). Thus an integration leads to

$$\begin{aligned}\bar{p}(0,\,0)-\bar{p}(\bar{x},\,\eta)=&\frac{4\bar{x}}{(1+2h_1)\,\mathrm{Re}}+\frac{\lambda C\bar{x}^2}{2\mathrm{Re}^2}-\frac{\lambda}{\mathrm{Re}^2}\frac{f'}{\eta}+\\&+\frac{\lambda^2}{2\mathrm{Re}^2}\frac{f^2}{\eta^2}+\frac{\lambda}{\mathrm{Re}^2}\left[\frac{4(1+2h_1)}{1+4h_1}+\frac{2(1+6h_1)}{9(1+4h_1)^2}\lambda+\right.\\&\left.+\frac{166+2324h_1+10080h_1^2+14400h_1^3}{2700(1+2h_1)^4}\lambda^2\right]\end{aligned} \tag{47}$$

which reduces to equation (3—17) of Bansal (1966) when $h_1=0$. From (47), the axial pressure drop is now derived as

$$\bar{p}(0,\,\eta)-\bar{p}(\bar{x},\,\eta)=\frac{4\bar{x}}{(1+2h_1)\,\mathrm{Re}}+\frac{\lambda C\bar{x}^2}{2\mathrm{Re}^2} \tag{48}$$

The skin-friction at the wall is given by

$$\tau_0 = \frac{\mu U_m}{R}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)_{\eta=1} \tag{49}$$

Hence in non-dimensional form, we get from (49), (14), (16) and (22), the skin-friction as

$$C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_m^2} = \frac{2}{C}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\left[\frac{8}{1+4h_1} - \frac{2}{3(1+4h_1)^2}\lambda - \frac{26+186h_1+360h_1^2}{135(1+4h_1)^4}\lambda^2\right] \tag{50}$$

The mass flow across a section at any $\bar{x}$ is given by

$$Q = 2\pi R^2 U_m \int_0^{\prime} \bar{u}\eta d\eta = 2\pi R^2 U_m \frac{\mathrm{Re}}{C}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \tag{51}$$

Also, in case of impermeable wall ($\lambda=0$), we have the mass flow as

$$Q_0 = \pi R^2 U_m \frac{1+4h_1}{2(1+2h_1)} \tag{52}$$

From (51) and (52), we can write down the discharge coefficient as

$$C_Q = \frac{Q}{Q_0} = \frac{4(1+2h_1)}{1+4h_1}\frac{\mathrm{Re}}{C}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}. \tag{53}$$

Numerical values of $\bar{u}$, $\bar{v}$, $pp\ (=\bar{p}\,(0,0)-\bar{p}\,(\bar{x},\eta))$, C_f and C_Q are calculated for $\lambda=0.1,\ 0.2$; $h_1=0,\ 0.1,\ 0.2$, $Re=1\,000$ and are shown on graphs in figures 1—5.

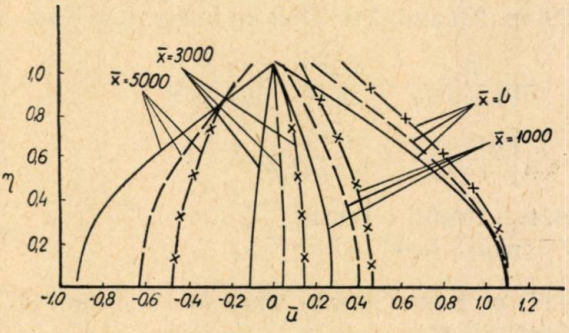

Fig. 1. Axial velocity profiles, $\lambda=0.1$:
$h_1=0$ ——— ; $h_1=0.1$ — — — —; $h_1=0,2$ — ×—× ;

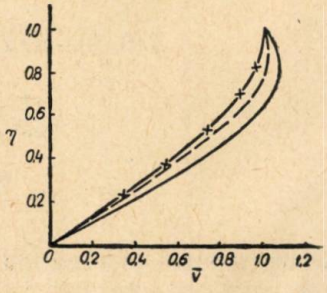

Fig. 2. Radial velocity profiles, $\lambda=0.1$.
$h_1=0$ ——— ; $h_1=0.1$ — — — — ;
$h_1=0,2$ — ×—× ;

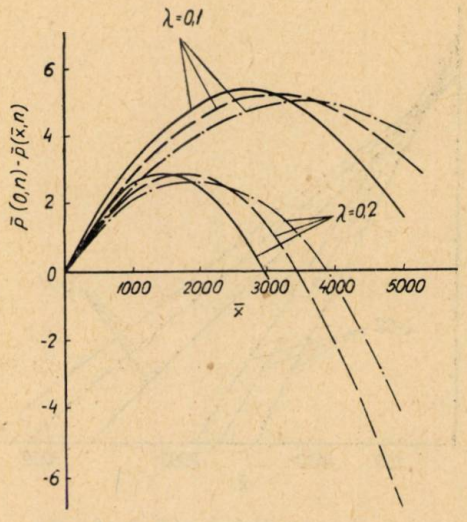

Fig. 3. Axial pressure drep vs $\bar{x}$, $\lambda=0.1$, 0.2
$h_1=0$ ——— ; $h_1=0.1$ — — — — ; $h_1=0.2$ — · — · —

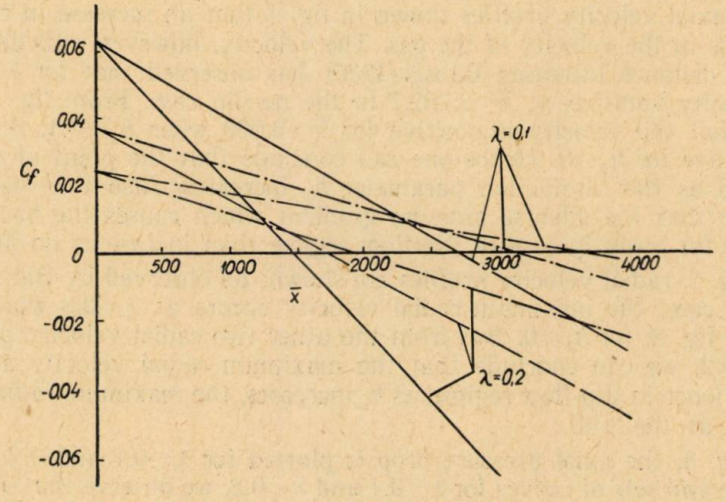

Fig. 4. Skin-friction vs $\bar{x}$, $\lambda=0.1$, 0.2
$h_1=0$ ——— ; $h_1=0.1$ — — — — ; $h_1=0.2$ — · — · —

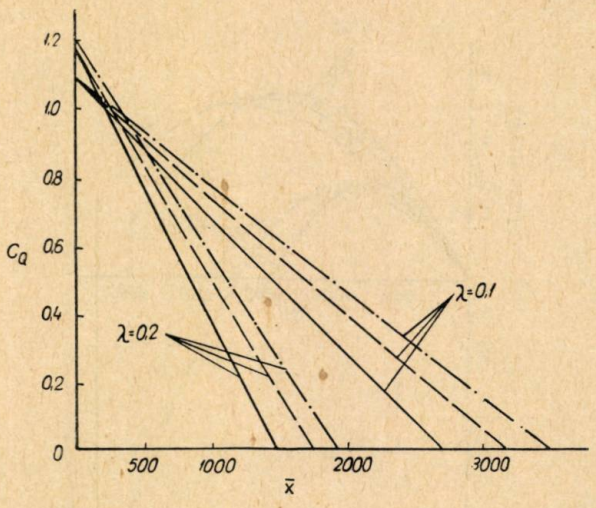

Fig. 5. Mass coefficient vs $\bar{x}$, $\lambda=0.1, 0.2$.
$h_1=0$ ——— ; $h_1=0.1$ — — — — ; $h_1=0.2$ — · — · — ;

3. CONCLUSIONS

1. Velocity profiles :

The nature of the velocity profiles in the slip-flow regime is the same as that in no-slip case. This has been described by Bansal (1966). However the magnitude of the velocity changes due to the gas-rarefaction. It can be observed from the axial velocity profiles shown in fig. 1 that an increase in h_1 leads to an increase in the velocity of the gas. The velocity, however, still decreases as the axial distance increases. Bansal (1966) has observed that for $\lambda=0.1$, the axial velocity vanishes at $\bar{x}=2\,702{,}7$ in the no-slip case. From fig. 1, we can observe that the velocity is positive for $\bar{x}=3\,000$ when $h_1=0.1$, 0.2 whereas it is negative for $h_1=0$. Hence one can conclude that the point of separation is delayed as the rarefaction parameter h_1 increases. Also this leads to the conclusion that the adverse pressure gradient which causes the back flow, is developed far away in case of slip-flow regime than in case of no-slip regime.

In fig. 2, radial velocity profiles are shown. As observed by Bansal (1966), in no-slip case, the maximum radial velocity occurs at $\eta=0.8$ which can be seen from fig. 2. for $h_1=0$. But from the other two radial velocity profiles for $h_1=0.1$, 0.2, we can conclude that the maximum radial velocity approaches to $\eta=1$. Hence in slip-flow regime, as h_1 increases, the maximum radial velocity is always at the wall.

In fig. 3, the axial pressure drop is plotted for $\lambda=0.1$ and 0.2. On comparing the two sets of curves for $\lambda=0.1$ and $\lambda=0.2$, we observe that an increase in λ leads to a decrease in the pressure drop in both no-slip and slip-flow. However, for the same value of λ, as h_1 increases, the pressure drop decreases in the

initial stages, but far away from the mouth, an increase in h_1 leads to an increase in the pressure drop which causes the back-flow to be delayed. As the suction velocity increases, the pressure gradient also decreases early and hence there is back-flow.

From fig. 4, one can observe that in general the skinfriction decreases as the suction parameter λ increases. In the initial stages, an increase in h_1 leads to a decrease in C_f, but the rate of decrease far away is less as h_1 increases.

In fig. 5, the mass coefficient is plotted. For $\bar{x}<300$, C_Q increases with increasing λ, but it falls rapidly with increasing λ for $\bar{x}>300$. An increase in h_1 leads to an increase in C_Q which is due to an increase in the magnitude of the velocity.

REFERENCES

1. Bansal. J. L., Laminar flow through a uniform circular pipe with small suction Proc. Nat. Inst. Sci. India. **32A**. 368—378 (1966).
2. Choudhary, R. C. and Sinha K. D. Steady flow of a viscous incompressibile fluid through a uniform circular pipe with small outward normal suction, Proc. Nat. Acad. Sci. India **A 34**. 203—210 (1966).
3. Eckert, E. R. G. and Drake, R. M., Heat and Mass Transfer, Mc Graw-Hill Book Co. Inc. New York, Y. N. pp—272—298 (1959).
4. Schaaf, S. A. and Chambre, P. L., Flow of a Rarefied Gases. Princeton University Press. (1958).
5. Sinha, K. D. and Choudhary, R. C., Flow of a viscous incompressible fluid between two parallel plates, one in uniform motion and the other at rest, with suction at the stationary plate. Proc. Ind. Acad. Sci. **61**. 308—318 (1965).
6. Sparrow, E. M. and Lin, S. H., Laminar heat transfer in tubes under slip-flow conditions. Tr. ASME. J. Heat Transfer, **84C**, 363—369 (1962).
7. Soundalgekar, V. M. and Divekar, V. G., On Couettee flow in slip-flow regime with suction at the stationary plate.(to be published in Ind. J. Engg. Maths).
8. Varma, P. D. and Bansal J. L. Flow of a viscous incompressible fluid between two parallel plates, one in uniform motion and the other at rest with uniform suction at the stationary plate. Proc. Ind. Acad. Sci. **64**, 385—396 (1966).
9. Yuan, S. W. and Finkelstein, A. B., Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall. Tr. ASME **78**. 719 (1956).

MIŞCAREA LAMINARĂ ÎN LUNGUL UNEI CONDUCTE DE SECŢIUNE CIRCULARĂ UNIFORMĂ CU ALUNECARE ŞI ABSORBŢIE MICĂ LA PERETE

(REZUMAT.)

Se studiază mişcarea permanentă şi bidimensională a unui fluid vîscos şi incompresibil în lungul unei conducte circulare poroase cu ajutorul metodei micilor perturbaţii.

Ecuaţiile Navier-Stokes sînt reduse la ecuaţii diferenţiale neliniare, de ordinul trei şi doi, care se soluţionează prin metoda perturbaţiilor pornind de la ipoteza unei alunecări la perete de ordinul întîi. Se determină, apoi, distri-

buţiile radiale şi axiale ale vitezelor, căderea axială de presiune, frecarea la perete şi debitul, cu o aproximaţie de ordinul 0 (λ^2), unde λ, numărul Reynolds de absorbţie, se consideră a fi foarte mic.

Rezultatele sînt reprezentate grafic. Se observă că separarea este întîrziată datorită rarefacţiei gazului. Viteza radială maximă corespunzătoare regimului de scurgere cu alunecare se situează în apropierea peretelui. Gradientul presiunii creşte cu h_1, parametrul de rarefacţie, ceea ce produce întîrzierea curentului opus. Frecarea la perete descreşte cu h_1 iar coeficientul de debit creşte odată cu acesta.

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВДОЛЬ ТРУБОПРОВОДА РАВНОМЕРНОГО КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ И НЕБОЛЬШОЙ АБСОРБЦИЕЙ ВБЛИЗИ СТЕНКИ

(РЕЗЮМЕ)

Изучается при помощи метода небольших возмущений постоянное и двухмерное движение вязкой несжимаемой жидкости вдоль круглого пористого трубопровода.

Уравнения Навье-Стокса приводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям третьего и второго порядка, которые решаются методом возмущений, исходя из предположения что по стенке происходит скольжение первого порядка. После этого определяется радиально-осевое распределение скоростей, осевое падение давления, трение о стенку и расход, с точностью порядка $0(\lambda)^2$, где λ — число абсорбции Рейнольдса, которое считается очень малым.

Результаты даются в графической форме, заметно что разделение запаздывает из за разрежения газа.

Максимальная радиальная скорость соответствует режиму течения со скольжением и располагается вблизи стенки. Градиент давления растет с h_1, — параметром разрежения, что создает запаздывание противотечения. Трение по стенке уменьшается, а коэффициент расхода растет вместе с h_1.

STABILITATEA MIŞCĂRILOR PERIODICE ALE UNUI SISTEM VIBROPERCUTANT CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

DE

GH. SILAŞ L. BRÎNDEU

1. ÎNTRODUCERE

Există mai multe metode de a obţine condiţiile de stabilitate ale mişcărilor periodice în cazul sistemelor vibropercutante [1], [2].

Folosind o metodă directă, calculele intermediare necesare scrierii condiţiilor de stabilitate se simplifică mult. Avantajele folosirii metodei directe au fost prezentate însă numai pentru sisteme cu un grad de libertate [3]. Este evident că în cazul sistemelor cu mai multe grade de libertate simplificările obţinute vor fi şi mai importante.

În prezenta lucrare se aplică, metoda directă de scriere a condiţiilor de stabilitate, a unui sistem vibropercutant cu două grade de libertate şi o singură cuplă percutantă, ce reprezintă modelul dinamic pentru multe probleme tehnice [1], [4]. De exemplu în legătură cu acest model a fost studiată precizia dinamică a mecanismului cu legături elastice care lucrează în condiţii de vibraţii staţionare. Concluziile obţinute au fost verificate în practica construcţiei de aparate la care schema cinematică se închide prin legături elastice. În aceste lucrări nu s-a studiat însă stabilitatea mişcărilor periodice, calculele fiind mai complicate. După cum se arată în continuare, prin aplicarea metodei directe, aceste calcule sînt mult mai simple şi condiţiile de stabilitate se pot scrie chiar dacă excitaţia este exprimată printr-o funcţie periodică oarecare.

2. MODELUL DINAMIC

Sistemul mecanic (fig. 1) constă din două mase m_1 şi m_2 legate prin arcurile cu constantele elastice k_1 şi k_2 de cutia aparatului ce execută vibraţii impuse după legea $\xi = \xi(t)$. Mişcarea cutiei se presupune periodică cu perioada T, adică

$$\xi(t+T) = \xi(t). \tag{1}$$

Între masele m_1 și m_2, care se pot deplasa fără frecare în interiorul cutiei, au loc ciocniri. Poziția relativă a celor două mase față de cutie se determină cu ajutorul coordonatelor q_1 și q_2 măsurate din pozițiile corespunzătoare arcurilor nedeformate. Ecuațiile diferențiale ale mișcării în intervalul dintre două ciocniri succesive sînt

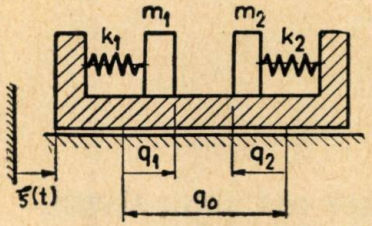

Fig. 1.

$$\ddot{q}_1+p_1^2q_1=-\ddot{\xi}(t) \tag{2}$$

și

$$\ddot{q}_2+p_2^2q_2=\ddot{\xi}(t) \tag{3}$$

unde

$$p_1=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}},\quad p_2=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}.$$

Pentru studiul ciocnirilor este important de observat că sistemul mai este supus și la legătura unilaterală

$$f(q_1,\ q_2)=q_0-q_1-q_2\geqslant 0. \tag{4}$$

Astfel studiul mișcării sistemului vibropercutant poate fi făcut pe baza unei scheme mai generale folosind teoria funcției legăturii unilaterale [3], [4].

Se presupune că mișcarea se face cu ciocniri iar contactul dintre mase este instantaneu. Dacă vitezele la începutul unei ciocniri se notează prin q_{ic} $(i=1,\ 2)$ atunci la sfîrșitul ciocnirii acestea devin

$$\dot{q}'_{1c}=\frac{(\mu-R)\,\dot{q}_{1c}-(1+R)\,\dot{q}_{2c}}{1+\mu}. \tag{5}$$

și

$$\dot{q}'_{2c}=\frac{-\mu\,(1+R)\,\dot{q}_{1c}+(1-\mu R)\,\dot{q}_{2c}}{1+\mu} \tag{6}$$

unde $\mu=\frac{m_1}{m_2}$ iar R $(0<R\leqslant 1)$ coeficientul de restituire la ciocnire. Este ușor de observat că aceste viteze satisfac relația

$$\dot{q}'_{1c}+\dot{q}'_{2c}=-R\,(\dot{q}_{1c}+\dot{q}_{2c})$$

Studiul mișcării se poate face separat pe fiecare interval folosind metoda ajustării [6].

3. CONDIȚII DE EXISTENȚĂ A MIȘCĂRILOR PERIODICE.

Mișcările periodice ale sistemului vibropercutant vor avea perioada rT $(r=1, 2, \ldots,)$ multiplă perioadei funcției $\xi(t)$. Se vor considera în continuare numai mișcările cu o singură ciocnire într-o perioadă. Presupunînd că prima

ciocnire este la momentul $t=t_0$ atunci momentul ciocnirii de ordin k ($k=1, 2, \ldots, n$) va fi $t_k=t_0+krT$.

Pentru ca mișcarea sistemului vibropercutant să fie periodică trebuie ca toate ciocnirile să se efectueze în aceeași poziție a maselor determinată de coordonatele q_{ic} ($i=1, 2$). De asemenea la începutul fiecărui interval, vitezele trebuie să fie aceleași, adică $\dot{q}'_{ic}$ ($i=1, 2$).

Legile mișcării periodice pe intervalul considerat $\bar{q}_i=\bar{q}_i(t)$ ($i=1, 2$) sînt integralele ecuațiilor diferențiale (2) și (3) care verifică condițiile inițiale

$$\bar{q}_i(t_k)=q_{ic}, \quad \dot{\bar{q}}_i(t_k)=\dot{q}'_{ic}; \quad (i=1, 2) \tag{7}$$

Evident pentru a fi satisfăcute aceste relații este necesar ca la sfîrșitul fiecărui interval vitezele să fie aceleași, adică $\dot{q}_{ic}$ ($i=1, 2$). Deci la sfîrșitul fiecărui interval trebuie puse în legile mișcării condițiile

$$\bar{q}_i(t_{k+1})=q_{ic}, \dot{\bar{q}}_i(t_{k+1})=\dot{q}_{ic}; \quad (i=1, 2) \tag{8}$$

Se obțin astfel condiții de existență pentru mișcările periodice. Aceste condiții împreună cu egalitățile (4), (5), (6) determină parametrii mișcării periodice: t_k, q_{ic}, $\dot{q}_{ic}$, și $\dot{q}'_{ic}$ ($i=1, 2$).

Nu vom calcula efectiv parametrii mișcării deoarece nu este necesar pentru studiul stabilității mișcării.

4. STUDIUL STABILITĂȚII MIȘCĂRILOR PERIODICE PRIN METODA DIRECTĂ

Pentru scrierea condițiilor de stabilitate ale mișcărilor periodice în cazul sistemelor vibropercutante, s-a elaborat o metodă directă [3], ce nu necesită găsirea legilor mișcării. Este suficient să se presupună că legile mișcării verifică ecuațiile diferențiale (2), (3) și condițiile limită (7), (8) de pe interval.

Studiul stabilității mișcării se va face prin metoda perturbațiilor. În mișcarea perturbată parametrii mișcării au alte valori decît în mișcarea periodică. Datorită acestor perturbații, ce trebuie considerate mici, și în intervalul dintre două ciocniri succesive legile mișcării sînt perturbate. Se vor considera deci soluții ale ecuațiilor diferențiale (2), (3) care diferă prin variațiile x_i ($i=1, 2$) de legile mișcării periodice $\bar{q}_i=\bar{q}_i(t)$, ($i=1, 2$); adică

$$q_i=\bar{q}_i+x_i; \quad (i=1, 2). \tag{9}$$

Ecuațiile în variații se obțin înlocuind în ecuațiile diferențiale (2), (3) soluțiile (9). Astfel rezultă

$$\ddot{x}_i+p_i^2x_i=0, \quad (i=1, 2). \tag{10}$$

Mai este necesar să se deducă condițiile limită pentru variații în momentele ciocnirilor din mișcarea periodică.

În mișcarea perturbată ciocnirea de ordinul k va avea loc la momentul $t_k+\Delta t_k$, cînd coordonatele au valorile $q_{ic}+\Delta q_{ik}$ ($i=1, 2$) cu $\Delta q_{1k}+\Delta q_{2k}=0$.

Vitezele la începutul acestei ciocniri vor fi $\dot{q}_{ic}+\Delta\dot{q}_{ik}$ iar la sfîrșit $\dot{q}'_{ic}+\Delta\dot{q}'_{ik}$ $(i=1, 2)$, unde

$$\Delta\dot{q}'_{1k}=\frac{(\mu-R)\,\dot{q}_{1c}-(1+R)\,\dot{q}_{2c}}{1+\mu};\qquad \Delta\dot{q}'_{2k}=\frac{-\mu(1+R)\,\dot{q}_{1c}+(1-\mu R)\,\dot{q}_{2c}}{1+\mu} \tag{11}$$

Prin urmare în mișcarea perturbată condițiile inițiale devin

$$q_i(t_k+\Delta t_k)=q_{ic}+\Delta q_{ik};\quad \dot{q}_i(t_k+\Delta t_k)=\dot{q}'_{ic}+\Delta\dot{q}'_{ik};\quad (i=1, 2) \tag{12}$$

iar cele finale

$$q_i(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})=q_{ic}+\Delta q_{i,k+1};\quad \dot{q}_i(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})=\dot{q}_{ic}+\Delta\dot{q}_{ik};\quad (i=1, 2) \tag{13}$$

Ținînd seama de legile mișcării perturbate (9) și că variațiile au același ordin de mărime ca și perturbațiile, din condițiile inițiale (12) se obțin

$$x_i(t_k)=\Delta\dot{q}_{ik}-\dot{q}'_{ic}\Delta t_k;\quad \dot{x}_i(t_k)=\Delta\dot{q}'_{ik}-\ddot{q}'_{ic}\Delta t_k;\quad (i=1, 2) \tag{14}$$

iar din cele finale (13)

$$x_i(t_{k+1})=\Delta q_{i,k+1}-\dot{q}_{ic}\Delta t_{k+1};\quad \dot{x}_i(t_{k+1})=\Delta\dot{q}_{i,k+1}-\ddot{q}_{ic}\Delta t_{k+1};\quad (i=1, 2) \tag{15}$$

unde $\ddot{q}_{ic}$ și $\ddot{q}'_{ic}$ se pot calcula din ecuațiile diferențiale (2), (3).

După integrarea ecuațiilor diferențiale în variații (10) pentru condițiile inițiale (14), cu ajutorul condițiilor finale (15) se obțin ecuațiile cu diferențe finite în perturbații necesare scrierii condițiilor de stabilitate.

5. DETERMINAREA CONDIȚIILOR DE STABILITATE ALE MIȘCĂRILOR PERIODICE

Pentru scrierea condițiilor de stabilitate nu este necesar să se precizeze funcția $\xi=\xi(t)$.

Într-adevăr ecuațiile diferențiale (10) se integrează imediat și rezultă

$$x_i(t)=X_{i1}\cos p_i(t-t_k)+X_{i2}\sin p_i(t-t_k);\quad (i=1, 2) \tag{16}$$

unde X_{i1}, X_{i2} $(i=1, 2)$ sînt constante de integrare. Aceste constante se determină din condițiile inițiale (14) și au expresiile

$$X_{i1}=x_i(t_k);\quad X_{i2}=\frac{1}{p_i}\dot{x}_i(t_k)\quad (i=1, 2). \tag{16'}$$

Din legile mișcării (16) cu constantele (16'), se obțin pentru sfîrșitul intervalului relațiile

$$\begin{aligned} x_i(t_{k+1})&=x_i(t_k)\cos p_i rT+\frac{1}{p_i}\dot{x}_i(t_k)\sin p_i rT\\ \dot{x}_i(t_{k+1})&=-p_i x_i(t_k)\sin p_i rT+\dot{x}_i(t_k)\cos p_i rT. \end{aligned}\qquad (i=1, 2) \tag{17}$$

Ținînd seama de condițiile inițiale (14) și finale (15), pentru sistemul de ecuații cu diferențe finite (17) rezultă ecuația caracteristică

$$\beta^4+a_1\beta^3+a_2\beta^2+a_3\beta+a_4=0 \tag{18}$$

unde

$$a_1=-\frac{1}{1+\mu}\left\{2\left[(\mu-R)\cos p_1rT+(1-\mu R)\cos p_2rT\right]-\right.$$

$$\left.-(1+R)\left(\frac{1}{p_1}\sin p_1rT+\frac{\mu}{p_2}\sin p_2rT\right)\frac{p_1^2q_{1c}+p_2^2q_{2c}}{\dot{q}_{1c}+\dot{q}_{2c}}\right\}$$

$$a_2=-\frac{2(1+R)}{1-\mu}\left(\frac{1}{p_1}\sin p_1rT\cos p_2rT+\frac{\mu}{p_2}\cos p_1rT\sin p_2rT\right)\frac{p_1^2q_{1c}+p_2^2q_{2c}}{\dot{q}_{1c}+\dot{q}_{2c}}-$$

$$-\frac{1}{(1+\mu)^2}\left\{2\left[2R(1+\mu)^2-\mu(1+R)^2\right]\cos p_1rT\cos p_2rT-\right.$$

$$\left.-\mu(1+R)^2\left(\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}\right)\sin p_1rT\sin p_2rT-(1-\mu R)^2-(\mu-R)^2\right\}$$

$$a_3=\frac{1}{1+\mu}\left\{2R\left[(1-\mu R)\cos p_1rT+(\mu-R)\cos p_2rT\right]+(1+R)\left(\frac{1}{p_1}\sin p_1rT+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mu}{p_2}\sin p_2rT\right)\frac{p_1^2q_{1c}+p_2^2q_{2c}}{\dot{q}_{1c}+\dot{q}_{2c}}\right\}$$

$$a_4=R^2.$$

Rădăcinile β ale acestei ecuații trebuie să fie în modul subunitare pentru ca mișcarea periodică să fie asimptotic stabilă. Condițiile de stabilitate se obțin deci aplicînd criteriul cunoscut a lui Schur [1].

BIBLIOGRAFIE

1. Кобринский А. Е., *Механизмы с упругами связями.* Изд. Наука, Москва, 1957.
2. Беспалова Л. В., К теори виброударного механизма. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1957.
3. Brîndeu L., Contribuții privind studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Rezumatul tezei de doctorat, Inst. Polit. Timișoara, 1970.
4. Кобринский А. Е., Колебания двухмассовой системы, движущеися с периодическими соударениями. Изв. АН СССР, ОТН. № 5, 1956.
5. Silaș Gh., Brîndeu L, Behandlung periodischer Bewegungen von Ruttelsystemen mit den Lagrangeschen Gleichungen, VDI Berichte, Nr. 135, 1969.
6. Бутенин Н. В., *Элементы теории нелинейных колебаний.* Судпромгиз, Ленинград, 1964.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(РЕЗЮМЕ)

В исследовании устойчивости периодических движений виброударных систем был выработан новый метод записи условий устойчивости, применяемый самым общим системом [3]. На основе данного метода исследуется устойчивость периодических движений виброударной системы с двумя степенями свободы и одной ударной пары, находящейся под периодическим возбуждением (рис. 1). Записываются уравнения в вариациях (10), для которых определяются начальные (14) и конечные (15) условия в промежутке между двумя последующими ударами из периодического движения. После интегрирования получается уравнение линеаризированное в возмущениях, а затем характеристическое уравнение (18) из которого следуют условия устойчивости.

THE STABILITY OF PERIODIC MOTIONS OF A SHOCK-VIBRATION SYSTEM WITH TWO DEGREE OF FREEDOM

(ABSTRACT)

With the view of studying the stability of periodic motions of shock-vibration systems a new method was found out for the determination of stability conditions [3]. This method may be applied to most general systems. By using this direct method, stability of periodic motions of an shock-vibration system with two degrees of freedom and a single shock pair, under the action of a periodic excitation, is investigated (fig. 1). The equations in variations (10) are established. Initial (14) and final (15) conditions for these equations are determined within the interval between two successive shocks of the periodic motion. After integration a linearized equation, in perturbation is obtained. There is also obtained the characteristic equation (18) from which the stability conditions are resulting.

OSCILAȚIILE UNUI SISTEM MECANIC ACȚIONAT DE UN MOTOR ELECTRIC AVÎND PUTEREA LIMITATĂ

DE

GH. SILAȘ, I. GROȘANU

În lucrare se consideră sistemul din fig. 1, acționat de un motor electric avînd momentul $M_M = M_M(\dot{\varphi})$, cunoscut.

Rezistențele mecanice atît în mișcarea de translație, cît și în mișcarea de rotație se presupun de natură vîscoasă.

Ecuațiile de mișcare ale sistemului sînt:

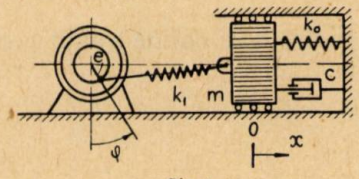

Fig 1.

$$\begin{aligned} &m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=k_1 e\sin\varphi \\ &J\ddot{\varphi}+c_1\dot{\varphi}=k_1 ex\cos\varphi-k_1e^2\sin\varphi\cos\varphi+M_M(\dot{\varphi}) \end{aligned} \tag{1}$$

Folosind notațiile:

$$k=k_0+k_1,\quad \omega_n^2=\frac{k}{m},\quad \tau=\omega_n t,\quad \mu=\frac{k_1}{m\omega_n^2},$$

$$2D=\frac{C}{m\omega_n},\quad y=\frac{x}{\mu e},\quad Q(\varphi')=\varepsilon\bar{Q}(\varphi')=\frac{M_M(\varphi')-C_1\omega_n\varphi'}{J\omega_n^2}, \tag{2}$$

$$\nu=\varepsilon\bar{\nu}=\frac{\mu k_1e^2}{J\omega_n^2},\quad \delta=\varepsilon\bar{\delta}=\frac{k_1e^2}{J\omega_n^2}.$$

ecuațiile (1) devin

$$\begin{aligned} &y''+2Dy'+y=\sin\varphi \\ &\varphi''=\varepsilon\bar{\nu}y\cos\varphi-\varepsilon\bar{\delta}\sin\varphi\cos\varphi+\varepsilon\bar{Q}(\varphi'). \end{aligned} \tag{3}$$

Cu ecuațiile (3) se determină regimurile staționare ale sistemului. Se caută regimuri staționare periodice, care se studiază aproximativ folosind metoda

parametrului mic. În acest scop, soluțiile sistemului autonom (3) se aleg de forma :

$$y=y^{(0)}+\varepsilon y^{(1)}+\varepsilon^2 y^{(2)}+\ldots$$
$$\varphi=\varphi^{(0)}+\varepsilon\varphi^{(1)}+\varepsilon^2\varphi^{(2)}+\ldots \tag{4}$$

Pentru aproximația de ordinul zero se obțin soluțiile particulare :

$$y^{(0)}=C_1^{(0)}\sin\eta\tau+C_2^{(0)}\cos\eta\tau$$
$$\varphi^{(0)}=\eta\tau \tag{5}$$

unde :

$$C_2^{(0)}=\frac{-2D\eta}{R_0},\quad C_1^{(0)}=\frac{1-\eta^2}{R_0},\quad R_0=(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2. \tag{6}$$

Considerînd ecuația

$$\varphi^{(1)\prime\prime}=\bar{\nu}y^{(0)}\cos\eta\tau-\frac{\bar{\delta}}{2}\sin 2\eta\tau+\bar{Q}(\eta) \tag{7}$$

pentru a se obține soluții periodice, trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\frac{\nu C_2^{(0)}}{2}+Q(\eta)=0. \tag{8}$$

Din această ecuație algebrică se determină valorile vitezei unghiulare medii η, pentru care se obțin regimuri staționare periodice.

Dacă condiția (8) este îndeplinită, funcția $\varphi^{(1)}$ este dată de expresia

$$\varphi^{(1)}=-\frac{\bar{\nu}C_1^{(0)}-\bar{\delta}}{8\eta^2}\sin 2\eta\tau-\frac{\bar{\nu}C_2^{(0)}}{8\eta^2}\cos 2\eta\tau. \tag{9}$$

Considerînd numai primele două aproximații, unghiul φ se exprimă prin ;

$$\varphi(\tau)=\eta\tau-\frac{\nu C_1^{(0)}-\delta}{8\eta^2}\sin 2\eta\tau-\frac{\nu C_2^{(0)}}{8\eta^2}\cos 2\eta\tau. \tag{10}$$

Pentru funcția $y^{(1)}$ se consideră soluția particulară a ecuației

$$y^{(1)\prime\prime}+2Dy^{(1)\prime}+y^{(1)}=\varphi^{(1)}\cos\eta\tau \tag{11}$$

dată de

$$y^{(1)}=C_1^{(1)}\sin\eta\tau+C_2^{(1)}\cos\eta\tau+C_3^{(1)}\sin 3\eta\tau+C_4^{(1)}\cos 3\eta\tau \tag{12}$$

$$C_1^{(1)}=\frac{1}{8\eta^2R_0}[(\bar{\nu}C_1^{(0)}-\bar{\delta})(1-\eta^2)+2D\eta\bar{\nu}C_2^{(0)}]$$

$$C_2^{(1)}=\frac{1}{8\eta^2R_0}[\bar{\nu}C_2^{(0)}(1-\eta^2)-2D\eta(\bar{\nu}C_1^{(0)}-\bar{\delta})]$$

$$C_3^{(1)}=\frac{1}{8\eta^2R_1}[(\bar{\nu}C_1^{(0)}-\bar{\delta})(1-9\eta^2)+6D\eta\bar{\nu}C_2^{(0)}] \tag{13}$$

$$C_4^{(1)}=\frac{1}{8\eta^2R_1}[\bar{\nu}C_2^{(0)}(1-9\eta^2)-6D\eta(\bar{\nu}C_1^{(0)}-\bar{\delta})]$$

$$R_1=(1-9\eta^2)^2+36D^2\eta^2.$$

Considerînd numai primele două aproximații, deplasarea adimensională y este dată de:

$$y=\left\{C_1^{(0)}-\frac{1}{8\eta^2R_0}[(\nu C_1^{(0)}-\delta)(1-\eta^2)+2D\eta\nu C_2^{(0)}]\right\}\sin\eta\tau+$$

$$+\left\{C_2^{(0)}-\frac{1}{8\eta^2R_0}[\nu C_2^{(0)}(1-\eta^2)-2D\eta(\nu C_1^{(0)}-\delta]\right\}\cos\eta\tau-$$

$$-\frac{1}{8\eta^2R_1}[(\nu C_1^{(0)}-\delta)(1-9\eta^2)+6D\eta C_2^{(0)}]\sin 3\eta\tau-$$

$$-\frac{1}{8\eta^2R_1}[\nu C_2^{(0)}(1-9\eta^2)-6D\eta(\nu C_1^{(0)}-\delta)]\cos 3\eta\tau. \tag{14}$$

Ecuația algebrică (8) se poate rezolva aproximativ folosind metoda grafică, adică intersectînd curbele

$$\Gamma(\eta)=\frac{\nu D\eta}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2} \tag{15}$$

cu

$$Q(\eta)=\frac{M_M(\eta)-C_1\omega_n\eta}{J\omega_n^2} \tag{16}$$

Valorile vitezei unghiulare medii η, pentru care se obțin regimuri staționare periodice sînt abscisele punctelor obținute din $\Gamma(\eta)\cap Q(\eta)$, deci sînt posibile mai multe regimuri staționare periodice corespunzătoare rădăcinilor reale și pozitive ale ecuației algebrice.

$$\Gamma(\eta)=Q(\eta) \tag{17}$$

Pentru funcția $\Gamma(\eta)$ se observă că

$$\Gamma(0)=0,\quad \Gamma(1)=\frac{\nu}{4D}\quad \Gamma(\infty)=0. \tag{18}$$

Derivînd funcția $\Gamma(\eta)$ se găsește

$$\Gamma'(\eta)=\frac{d\Gamma}{d\eta}=-\nu D\frac{3\eta^4-2(1-2D^2)\eta^2-1}{R_0^2} \tag{19}$$

de unde rezultă

$$\Gamma'(0)=\nu D, \quad \Gamma'(\infty)=0.$$

Funcția $\Gamma'(\eta)$ se anulează pentru

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{(1-2D^2)\pm\sqrt{(1-2D^2)^2+3}}{3}}. \tag{20}$$

Cum regimurile staționare sînt posibile numai pentru valori reale și pozitive ale lui η, din (20) convine numai valoarea

$$\eta'=\sqrt{\frac{\sqrt{(1-2D^2)^2+3}+(1-2D^2)}{3}} \tag{221}$$

pentru care $\Gamma(\eta)$ are o valoare maximă.

În fig. 2, s-a reprezentat o curbă $\Gamma(\eta)$ și o curbă $Q(\eta)$, considerînd că $Q(\eta)$ este o funcție monoton descrescătoare.

Se observă că sînt posibile cel mult trei regimuri staționare periodice corespunzătoare valorilor η_1, η_2 și η_3 determinate din $\Gamma(\eta)\cap Q(\eta)$. Pe fig. 2, s-au notat aceste valori în ordinea $\eta_1<\eta_2<\eta_3$; admițînd că rădăcinile ecuației (17) sînt reale și distincte.

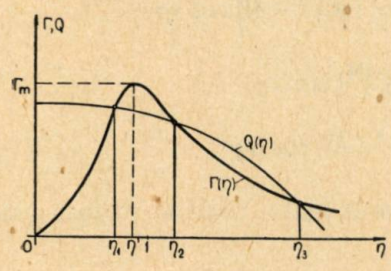

Fig. 2

Pentru studiul stabilității regimurilor staționare periodice se consideră ca funcțiile $Q(\eta)$ și $\Gamma(\eta)$ se pot dezvolta în serie și una din valorile η_1, η_2, η_3 ale vitezei unghiulare medii, obținute din ecuația (17), se perturbă cu valoare infinit mică $\Delta\eta_s>0$. Deci, considerînd valoarea η_s pentru care are loc egalitatea

$$\Gamma(\eta_s)=Q(\eta_s) \tag{22}$$

η_s fiind o rădăcină simplă a ecuației (17), atunci dezvoltările funcțiilor $\Gamma(\eta)$ și $Q(\eta)$ în jurul valorii η_s, limitate la primii doi termeni sînt

$$\Gamma(\eta_s+\Delta\eta_s)=\Gamma(\eta_s)+\Gamma'(\eta)_{\eta=\eta_s}\Delta\eta_s \tag{23}$$

$$Q(\eta_s+\Delta\eta_s)=Q(\eta_s)+Q'(\eta)_{\eta=\eta_s}\Delta\eta_s.$$

În cazul în care are loc inegalitatea

$$\Gamma'(\eta)_{\eta=\eta_s}>Q'(\eta)_{\eta=\eta_s} \tag{24}$$

din (23) rezultă și inegalitatea

$$\Gamma(\eta_s+\Delta\eta_s)>Q(\eta_s+\Delta\eta_s). \tag{25}$$

Ținînd seama că $\Gamma(\eta)$ este momentul cuplului care frînează mișcarea de rotație iar $Q(\eta)$ este momentul cuplului transmis de motor sistemului, din (25)

se remarcă faptul că după perturbarea cu $\Delta\eta_s$ a regimului staționar periodic, regimul nestaționar care are loc după ce sistemul este lăsat liber tinde la regimul staționar pe care l-a avut sistemul înainte de perturbare. În mod analog, dacă are loc inegalitatea (24) rezultă și inegalitatea

$$\Gamma(\eta_s - \Delta\eta_s) < Q(\eta_s - \Delta\eta_s) \tag{26}$$

și deci după perturbarea rotației sistemului cu $-\Delta\eta_s$, mișcarea de rotație va fi accelerată tinzînd tot la valoarea medie η_s. Regimurile staționare pentru care este satisfăcută inegalitatea (24) sînt regimuri staționare stabile.

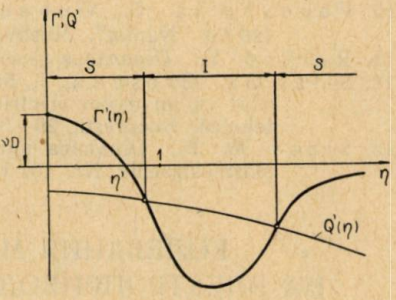

Fig 3

În fig. 3, s-a reprezentat o curbă $\Gamma'(\eta)$ și o curbă $Q'(\eta)$. Ținînd seama de (24) prin $\Gamma'(\eta) \cap Q'(\eta)$ s-au obținut punctele care delimitează domeniile se stabilitate și instabilitate ale sistemului. Domeniile de stabilitate s-au notat cu S iar cele de instabilitate cu I.

În concluzie pentru sistemul electromecanic din fig. 1 sînt posibile cel mult trei regimuri staționare periodice, corespunzătoare valorilor η_1, η_2, η_3, rădăcini reale simple ale ecuației (17).

Regimurile staționare corespunzătoare valorilor η_1 și η_3 sînt stabile iar regimul staționar corespunzător lui η_2 este instabil.

Regimurile staționare corespunzătoare lui η_1 și η_3 au valorile $\eta_1 < 1$ și $\eta_3 > 1$. Deci unul din regimurile staționare posibile este situat sub domeniul de rezonanță iar al doilea peste domeniul de rezonanță.

Regimul staționar corespunzător lui η_1, este mai apropiat de domeniul de rezonanță, deoarece la sistemele concrete factorul D este în general mic. Pentru acest regim viteza unghiulară are cele mai mari neuniformități, amplitudinile masei m fiind mari. Pentru regimul staționar corespunzător valorii η_3, neuniformitățile vitezei unghiulare și amplitudinile masei m, sînt mici.

BIBLIOGRAFIE

1. Blehman I. I, Problema samosinhronizații dinamicesskih sistem P.M.M., 1964 T. XXVIII, vip 2.
2. Christ H., Stationärer und instationärer Betrieb eines federngelagerten, umwuchtigen Motors. Dissertation der Technischen Hochschule Karlsruhe, 1966.
3. Christ H., Das Betriebsverhalten von Schwingförderrinen und Schwingsieben beim Antrieb durch einen Gleichstrom Nebenschluss Motor, VDI—Z, Bd.110, Nr. 3, Seite 81—120 Januar 1968.
4. Christ H., An- und Auslauf eines gedempften, unwuchterregten Schwingers. VDI-Berichte Nr. 135, 1969.
5. Frolov K. V., O modelirovanii rezonansnîh svoistv nekatorîh avtonomnîh nelineinîh kolebatelinîh Sistem. Prilojeniia metodov teorii nelineinîh Kolebanii k zadaciam fiziki i tehniki, Izd-vo Akad. Nauk SSSR, Kiev, 1963.

6. Groșanu I., Contribuții privind studiul mișcărilor staționare și nestaționare ale sistemelor mecanice excitate inerțial, acționate cu motoare electrice. Rezumatul tezei de doctorat I.P. Timișoara 1970.
7. Kononenko V. O. Nekotorîe avtonomnîe zadaci teorii nelineinîh kolebanii, Trudî medunarodnovo simpoziuma po nelineinîm kolebaniia, T./3, Kiev, Izd-vo AN SSSR, 1963.
8. Livovici A. Iu., Mehaniceskie kolebaniia vozbujdaemîe elektrodvigatelem. Vesnik Leningradskogo Universiteta, Nr. 7 Vip. 2, 1968.
9. Mazet R., *Mechanique vibratoire*. Paris—Leige, Libr. politechn. ch. Beranger, 1955.
10. Panovko Ia G., Gubanova I. I., *Ustoicivosti i kolebaniia uprugih sistem*. Izd-vo "Nauka", Moskva, 1967.
11. Racord Y., *Dinamique générale des vibrations*, Massou, Paris, 1949.
12. Silaș Gh., Groșanu., I., Studiul regimurilor staționare ale unui vibrator acționat cu un motor electric de curent continuu. A II-a Conferință de mecanică tehnică, București, 29—31 oct. 1970.
13. Sizov M. B., Dinamica uprugoi sistemî elektroprivoda. Izv. Vissih Zavedenii Mașinostroenie, Nr. 10, 1969, str. 25—28.

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ЭЛЕКТРОПРИВОДЕ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

(РЕЗЮМЕ)

Рассматривается механическая система с упругими линейными связями, приводимая в действие электродвигателем у которого задано выражение момента, как функция угловой скорости. Применяя метод малого параметра, установлены приближенные периодические стационарные режимы, а так же алгебраическое уравнение, по которому определяются осредненные значения угловой скорости характеризующей данные режимы.

При помощи энергетических соображений исследована устойчивость стационарных режимов.

DIE SCHWINGUNGEN EINES MECHANISCHEN VERBANDES, WELCHER MIT EINEM ELEKTRISCHEN MOTOR MIT BEGRENZTER LEISTUNG ANGETRIEBEN WIRD

(ZUSAMMENFASSUNG)

Im Beitrag wird ein mechanischer Verband mit linear-elastischen Bindungen betrachtet, welcher mit einem elektrischen Motor angetrieben wird, für welchen die Abhängigkeit des Momentes von der Drehgeschwindigkeit bekannt ist.

Mit der Methode des kleinen Parameters wurden die stationären periodischen Bewegungszustände näherungsweise untersucht und eine algebraische Gleichung bestimmt, aus welcher die Werte der mittleren Winkelgeschwindigkeit dieser Zustände berechnet werden können.

Mit Hilfe energetischer Überlegungen wurde die Stabilität der stationären periodischen Zustände untersucht.

ASUPRA MIȘCĂRII CU SALTURI ALE UNEI PARTICULE PE O PLATFORMĂ VIBRANTĂ ACȚIONATĂ DE UN GENERATOR DE VIBRAȚII

DE

DOINA BECHERESCU

INTRODUCERE

Mașinile vibratoare se folosesc pe scară largă la executarea unor operați cum ar fi transportul, separarea, cernerea, etc.

Partea principală a acestor mașini este platforma care execută mișcări vibratorii după una sau mai multe direcții și antrenează materialul transportat.

Materialul aflat pe platforma vibrantă se poate mișca cu sau fără desprindere de planul platformei. Realizarea acestor regimuri de mișcare depinde de parametrii mișcării platformei și de natura materialului.

Dintre aceste regimuri posibile ne vom mărgini la studiul regimurilor de mișcare cu desprindere, care s-a verificat practic că sînt mai productive pentru multe materiale.

Antrenarea platformei mobile se poate realiza cinematic în care caz platforma are o mișcare impusă. În felul acesta problema vibrotransportului sau a vibroseparării se rezolvă mai simplu, motiv pentru care se întîlnește astfel mai des în literatura de specialitate [1], [2], [3], [4].

Totuși majoritatea transportoarelor cu vibrații existente în tehnică sînt prevăzute cu generatoare de vibrații [5], [6], ce produc anumite forțe periodice și astfel determină mișcarea platformei.

Pornind de la această constatare am introdus un nou model dinamic pentru studiul vibrotransportului în care se ține seama și de mișcarea platformei. Se analizează deplasarea unei singure particule pe platformă. De fapt, mișcarea punctului material pe o astfel de platformă mobilă constituie problema centrală a vibrotransportului. Studiul mișcării particulei se poate face separat după două direcții perpendiculare ; una paralelă cu planul vibrator din care rezultă efectul de transport și una normală la plan din care se determină natura mișcării.

Condițiile de existență și stabilitate a regimurilor periodice cu zbor continuu a particulei, rezultă studiind mișcarea numai după normala la plan. Din această cauză, în continuare vom studia mișcarea numai după direcția normală la plan.

MODELE DINAMICE PENTRU STUDIUL VIBROTRANSPORTULUI

Pentru studiul vibrotransportului este necesar să se adopte un model dinamic care să țină seama și de modul cum este antrenată platforma. De obicei această antrenare se face printr-un generator de vibrații cu excentrice, însă ar putea fi și de altă natură, ca de exemplu : electromagnetic. Acest ultim mod de antrenare este preferabil uneori, deoarece se pot realiza forțe perturbatoare periodice arbitrare care conduc la procese de vibrotransport optim. În realitate, transportorul cuprinde platforma vibrantă care este formată din mai multe elemente legate între ele.

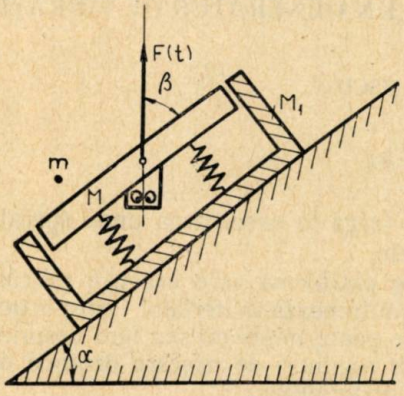

Fig. 1.

Mișcările acestor elemente sînt mai complexe și din această cauză sînt necesare anumite simplificări. Vom presupune că rotațiile elementelor platformei sînt mici, așa că ele execută mișcări de translație perpendiculare pe planul înclinat. Un model dinamic care să țină seama de aceste simplificări se arată în fig. 1.

Generatorul de vibrații rigid fixat de platformă produce forța perturbatoare $F(t)$ care este o funcție periodică cu perioada T și este înclinată cu unghiul constant β față de planul platformei. Masa platformei s-a notat prin M iar masa particulei prin m. De asemenea s-a mai notat prin M_1 masa părților de ghidare a mișcării. Masele M și M_1 sînt legate prin arcuri avînd constanta elastică k. Platforma și cu masa de ghidare vibrează de-a lungul planului înclinat cu unghiul α pe care se face transportul.

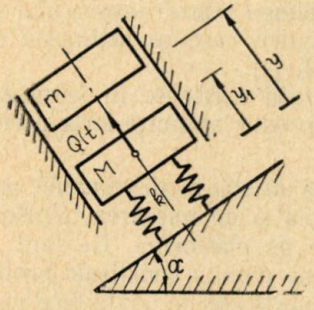

Fig. 2.

Deoarece în continuare ne interesează mișcarea după normala la planul înclinat, este suficient să considerăm un model dinamic mai simplu care ilustrează această mișcare (fig. 2). În acest model nu mai este necesar să se țină seama de masa M_1 deoarece nu se iau în considerare mișcările de-a lungul planului. De asemenea vom presupune $Q(t)$ componenta forței perturbatoare după normala la plan. Cele două mase M și m sînt ghidate astfel încît să aibe numai deplasări după normala la plan. Masa m se mișcă liber și se ciocnește de masa M. Ciocnirea dintre particulă și platformă mobilă se face instantaneu, cu coeficientul de restituire R $(0<R<1)$.

MIȘCĂRILE PERIODICE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT

Pentru sistemul vibropercutant din fig. 2 se vor determina mișcările periodice posibile. Aceste mișcări trebuie să aibe perioada multiplă perioadei T a forței perturbatoare, adică rT ($r=1, 2 \ldots$)

Dacă se notează cu y_1 și y coordonatele platformei și particulei măsurate din poziția nedeformată a arcurilor, între două ciocniri consecutive ecuația diferențială a mișcării platformei va fi

$$M\ddot{y}_1+ky_1=-Mg\cos\alpha+Q(t) \tag{1}$$

iar a particulei:

$$m\ddot{y}=-mg\cos\alpha. \tag{2}$$

Prin integrarea ecuațiilor (1) și (2) se obține:

$$y_1=C_1\cos\omega_n(t-t_k)+C_2\sin\omega_n(t-t_k)+\frac{1}{\omega_n}\int_{t_k}^{t}q(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau+$$

$$+\frac{g\cos\alpha}{\omega_n^2}[\cos\omega_n(t-t_k)-1]$$

$$y=C_3+C_4(t-t_k)-\frac{g\cos\alpha}{2}(t-t_k)^2$$

unde $\omega_n^2=\frac{k}{M}$; $q(t)=\frac{Q(t)}{M}$, C_i ($i=1, 2, 3, 4$) sînt constantele de integrare, iar t_k este momentul ciocnirii de ordinul k.

Masele sistemului se ciocnesc în acele poziții pentru care $y_1=y$. Dacă se notează cu y_0 coordonata ciocnirii, atunci în momentul ciocnirii avem $y_1=y=y_0$. Vitezele celor două mase vor fi la începutul unei ciocniri $\dot{y}_{10}$ și $\dot{y}_0$ iar la sfîrșit $\dot{y}'_{10}$ și $\dot{y}'_0$.

Astfel condițiile inițiale pentru mișcarea între două ciocniri succesivem sînt: $y_1(t_k)=y(t_k)=y_0$; $\dot{y}_1(t_k)=\dot{y}'_{10}$; $\dot{y}(t_k)=\dot{y}'_0$. Cu ajutorul acestor condiții se determină constantele de integrare C_i ($i=1, 2, 3, \ldots, 4$), iar legile mișcării particulei și platformei devin:

$$y_1=y_0\cos\omega_n(t-t_k)+\frac{\dot{y}'_{10}}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_k)+\frac{1}{\omega_n}\int_{t_k}^{t}q(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{g\cos\alpha}{\omega_n^2}[\cos\omega_n(t-t_k)-1]$$

(3)

$$\dot{y}_1=-\omega_n y_0\sin\omega_n(t-t_k)+\dot{y}'_{10}\cos\omega_n(t-t_k)+\int_{t_k}^{t}q(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{g\cos\alpha}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_k)$$

și

$$y=y_0+\dot{y}_0'(t-t_k)-\frac{g\cos\alpha}{2}(t-t_k)^2$$

$$\dot{y}=\dot{y}_0'-g\cos\alpha\,(t-t_k). \tag{4}$$

Aceste legi ale mișcării sînt valabile în intervalul dintre două ciocniri succesive. Pentru ca mișcările să se repete periodic este necesar să fie îndeplinite condițiile de periodicitate. La sfîrșitul intervalului $t_{k+1}=t_c+rT$, sistemul trebuie să ajungă astfel încît să fie satisfăcute condițiile $y_1(t_{k+1})=y(t_{k+1})=y_0$ și $\dot{y}_1(t_{k+1})=\dot{y}_{10}$ și $\dot{y}(t_{k+1})=\dot{y}_0$.

Ținînd seama de legile mișcării (3) și (4), condițiile de existență a mișcărilor periodice devin :

$$y_0=y_0\cos\omega_n(t_{k+1}-t_k)+\frac{\dot{y}_{10}'}{\omega_n}\sin\omega_n(t_{k+1}-t_k)+\frac{1}{\omega_n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}q(\tau)\sin\omega_n(t_{k+1}-\tau)d\tau+$$

$$+\frac{g\cos\alpha}{\omega_n^2}[\cos\omega_n(t_{k+1}-t_k)-1] \tag{5}$$

$$\dot{y}_{10}=-\omega_n y_0\sin\omega_n(t_{k+1}-t_k)+\dot{y}_{10}'\cos\omega_n(t_{k+1}-t_k)+\int_{t_k}^{t_{k+1}}q(\tau)\cos\omega_n(t_{k+1}-\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{g\cos\alpha}{\omega_n}\sin\omega_n(t_{k+1}-t_k)$$

și

$$y_0=y_0+\dot{y}_0'(t_{k+1}-t_k)-\frac{g\cos\alpha}{2}(t_{k+1}-t_k)^2$$

$$\dot{y}_0=\dot{y}_0'-y\cos\alpha\,(t_{k+1}-t_k). \tag{6}$$

Aceste ecuații se mai pot scrie sub forma

$$y_0(1-\cos\omega_n rT)-\frac{\dot{y}_{10}'}{\omega_n}\sin\omega_n rT+\frac{g\cos\alpha}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n rT)=$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int_{t_k}^{t_k+rT}q(\tau)\sin\omega_n(t_k+rT-\tau)\,d\tau$$

$$\dot{y}_{10}+\omega_n y_0\sin\omega_n rT-\dot{y}_{10}'\cos\omega_n rT+\frac{g\cos\alpha}{\omega_n}\sin\omega_n rT= \tag{7}$$

$$=\int_{t_k}^{t_k+rT}q(\tau)\cos\omega_n(t_k+rT-\tau)\,d\tau$$

și

$$0=\dot{y}_0'-\frac{g\cos\alpha}{2}rT$$

$$\dot{y}_0=\dot{y}_0'-g\cos\alpha rT. \tag{8}$$

Ținînd seama de faptul că ciocnirea este instantanee și se face cu coeficientul de restituire R ($R\neq 0$) între vitezele de ciocnire există relațiile cunoscute:

$$\dot{y}_{10}'=\frac{m(1+R)\dot{y}_0+(M-mR)\dot{y}_{10}}{m+M};\quad \dot{y}_0'=\frac{(m-MR)\dot{y}_0+M(1+R)\dot{y}_{10}}{m+M}. \tag{9}$$

Din ecuațiile (7), (8) și (9) se pot calcula parametrii t_k, y_0, $\dot{y}_{10}$, $\dot{y}_0$, $\dot{y}_{10}'$ și $\dot{y}_0'$ ce determină mișcările periodice. Astfel din ecuațiile (8) rezultă:

$$\dot{y}_0'=\frac{rTg\cos\alpha}{2} \tag{10}$$

și

$$\dot{y}_0=-\frac{rTg\cos\alpha}{2}. \tag{11}$$

Introducînd expresiile lui $\dot{y}_0$ și $\dot{y}_0'$ în relațiile (9) se obțin

$$\dot{y}_{10}'=\frac{rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}[M(1-R)-2mR] \tag{12}$$

$$\dot{y}_{10}=\frac{rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}[2m+M(1-R)]. \tag{13}$$

Coordonatele ciocnirii y_0 și momentul ciocnirii t_k se determină din sistemul de ecuații (7) care după înlocuirea parametrilor $\dot{y}_0$, $\dot{y}_0'$, $\dot{y}_{10}$ și $\dot{y}_{10}'$, devine:

$$\left(y_0+\frac{g\cos\alpha}{\omega_n^2}\right)(1-\cos\omega_n rT)-\frac{\sin\omega_n rT}{\omega_n}\frac{rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}[M(1-R)-2mR]=$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int_{t_k}^{t_k+rT}q(\tau)\sin\omega_n(t_k+rT-\tau)\,d\tau \tag{14}$$

$$\left(y_0+\frac{g\cos\alpha}{\omega_n^2}\right)\sin\omega_n rT-\frac{\cos\omega_n rT}{\omega_n}\frac{rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}[M(1-R)-2mR]+$$

$$+\frac{1}{\omega_n}\frac{rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}[2m+M(1-R)]=\frac{1}{\omega_n}\int_{t_k}^{t_k+rT}q(\tau)\cos\omega_n(t_k+rT-\tau)\,d\tau.$$

Din acest sistem eliminînd pe y_0 rezultă ecuația care determină momentul ciocnirii t_k

$$rTg\cos\alpha\frac{(m+M)(1-R)}{M(1+R)}\sin\frac{\omega_n rT}{2}+\int_{t_k}^{t_k+rT}q(\tau)\sin\omega_n\left(t_k+\frac{rT}{2}-\tau\right)d\tau=0. \tag{15}$$

Pentru existența mișcărilor periodice este necesar ca ecuația (15) să admită soluții în t_k. Acestea se determină efectiv cunoscînd expresia funcției periodice $q(t)$.

STABILITATEA MIȘCĂRILOR PERIODICE

S-au determinat anterior condițiile în care apar mișcări periodice precum și parametrii acestor mișcări. Efectiv nu toate mișcările periodice se realizează ci numai cele care sînt și stabile.

Studiul stabilității se va face prin metoda perturbațiilor, considerînd că parametrii mișcării diferă puțin de valorile determinate pentru mișcarea periodică.

Pentru studiul stabilității mișcărilor periodice în prima aproximație, se vor considera perturbații inițiale mici și se va analiza comportarea în continuare a sistemului. Dacă sistemul revine la mișcarea periodică atunci regimul de mișcare este stabil.

La ciocnirea de ordinul k parametrii mișcării periodice: t_k, y_0, $\dot{y}_{10}$ și $\dot{y}_0$ vor avea perturbațiile Δt_k, Δy_k, $\Delta \dot{y}_{1k}$ și $\Delta \dot{y}_k$, iar la ciocnirea următoare Δt_{k+1}, Δy_{k+1}, $\Delta \dot{y}_{1k+1}$ și $\Delta \dot{y}_{k+1}$. Astfel intervalul de timp între ciocnirile de ordinul k și $k+1$ va fi $rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k$. Legile mișcării vor avea aceeași formă ca și în mișcarea periodică (3), (4) numai că parametrilor mișcării trebuie să li se aplice perturbațiile corespunzătoare. Pentru sfîrșitul intervalului se vor obține următoarele relații:

$$y_0+\Delta y_{k+1}=(y_0+\Delta y_k)\cos\omega_n(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)+\frac{\dot{y}'_{10}+\Delta\dot{y}'_{1k}}{\omega_n}\sin\omega_n(rT+$$

$$+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)+\frac{1}{\omega_n}\int_{t_k+\Delta t_k}^{t_{k+1}+\Delta t_{k+1}} q(\tau)\sin\omega_n(t_{k+1}+\Delta t_{k+1}-\tau)d\tau+$$

$$+\frac{g\cos\alpha}{\omega_n^2}[\cos\omega_n(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)-1] \qquad (16)$$

$$\dot{y}_{10}+\Delta\dot{y}_{1k+1}=-\omega_n(y_0+\Delta y_k)\sin\omega_n(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)+(\dot{y}'_{10}+\Delta\dot{y}'_{1k})\cos\omega_n(rT+$$

$$+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)+\int_{t_k+\Delta t_k}^{t_{k+1}+\Delta t_{k+1}} q(\tau)\cos\omega_n(t_{k+1}+\Delta t_{k+1}-\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{g\cos\alpha}{\omega_n}\sin\omega_n(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)$$

și

$$y_0+\Delta y_{k+1}=y_0+\Delta y_k+(\dot{y}'_0+\Delta\dot{y}'_k)(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)-\frac{g\cos\alpha}{2}(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)^2$$

$$\dot{y}_0+\Delta\dot{y}_{k+1}=\dot{y}'_0+\Delta\dot{y}'_0-g\cos\alpha(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k). \qquad (17)$$

Perturbațiile $\Delta\dot{y}'_{1k}$ și $\Delta\dot{y}'_k$ se calculează cu formulele (9) unde în locul vitezelor se introduc perturbațiile $\Delta\dot{y}_{1k}$, $\Delta\dot{y}_k$. Ținînd seama că variațiile considerate sînt mici, ecuațiile (16) și (17) se pot liniariza. Părțile finite sînt chiar condițiile de existență (7) și (8). Se înlocuiește $\sin\omega_n(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)$ prin $\omega_n(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)$ iar $\cos\omega_n(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)$ prin 1. Pentru liniarizarea integralelor din condițiile (16) trebuie să se țină seama că perturbațiile intră și în limite. Vom separa integralele pe trei intervale și anume (t_c, t_{k+1}); $(t_{k+1}; t_{k+1}+\Delta t_{k+1})$ și $(t_k, t_k+\Delta t_k)$. Pe primul din aceste intervale se liniarizează în mod obișnuit, iar pentru celelalte se folosește teorema mediei. În felul acesta se pot obține ecuațiile liniarizate în perturbații chiar dacă integralele din legile mișcării (16) nu se calculează efectiv.

Ecuațiile liniarizate în perturbații vor fi

$$\omega_n\Delta y_{k+1}=\omega_n\Delta y_k\cos\omega_n rT-\omega_n^2 y_0\sin\omega_n rT(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)+\Delta\dot{y}'_{1k}\sin\omega_n rT+$$

$$+\omega_n\dot{y}'_{10}(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)\cos\omega_n rT-g\cos\alpha\sin\omega_n rT(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)+$$

$$+\omega_n\Delta t_{k+1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\tau)\cos\omega_n(t_{k+1}-\tau)\,d\tau-q(t_k)\sin\omega_h rT\Delta t_k \tag{18}$$

$$\Delta\dot{y}_{1k+1}=-\omega_n\Delta y_k\sin\omega_n rT-\omega_n^2 y_0\cos\omega_n rT(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)+\Delta\dot{y}'_k\cos\omega_n rT-$$

$$-\dot{y}'_{10}\omega_n\sin\omega_n rT(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)-g\cos\alpha\cos\omega_n rT(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)+$$

$$+q(t_k)\Delta t_{k+1}-q(t_k)\cos\omega_n rT\Delta t_k-\omega_n\Delta t_{k+1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} q(\tau)\sin\omega_n(t_{k+1}-\tau)\,d\tau.$$

$$\Delta y_{k+1}=\Delta y_k+rT\Delta\dot{y}'_k+\dot{y}'_0(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)-g\cos\alpha rT(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)$$

$$\Delta\dot{y}_{k+1}=\Delta\dot{y}'_k-g\cos\alpha(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k) \tag{19}$$

În aceste ecuații se introduc mărimile $\dot{y}'_0$ și $\dot{y}'_{10}$ cu ajutorul formulelor (10) și (12), precum și perturbațiile $\Delta\dot{y}'_{1k}$ și $\Delta\dot{y}'_k$, cu formulele (9) în funcție de variațiile $\Delta\dot{y}_{1k}$ și $\Delta\dot{y}_k$.

De asemenea integralele din ecuațiile (12) se înlocuiesc ținînd seama de ecuațiile (14). După aceste înlocuiri sistemul de ecuații în perturbații devine:

$$-\omega_n\Delta y_{k+1}+\omega_n\cos\omega_n rT\Delta y_k+\frac{m(1+R)}{m+M}\sin\omega_n rT\Delta\dot{y}_k+\frac{M-mR}{m+M}\sin\omega_n rT\Delta\dot{y}_{1k}+$$

$$+\frac{\omega_n rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}(2m+M-MR)\Delta t_{k+1}+\Big[\omega_n^2 y_0\sin\omega_n rT-$$

$$-\frac{\omega_n rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}(M-MR-2mR)\cos\omega_n rT-q(t_k)\sin\omega_n rT+$$

$$+g\cos\alpha\sin\omega_n rT\Big]\Delta t_k=0. \tag{20}$$

$$-\Delta\dot{y}_{1k+1}-\omega_n \sin \omega_n rT\Delta y_k+\frac{m(1+R)}{m+M}\cos \omega_n rT\Delta\dot{y}_k+\frac{M-mR}{m+M}\cos \omega_n rT\Delta\dot{y}_{1k}+$$

$$+[-\omega_n^2 y_0+q(t_k)-g\cos\alpha]\,\Delta t_{k+1}+\left[\omega_n^2 y_0\cos\omega_n rT+\frac{\omega_n rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}(M-\right.$$

$$\left.-MR-2mR)\sin\omega_n rT-q(t_k)\cos\omega_n rT+g\cos\alpha\cos\omega_n rT\right]\Delta t_k=0$$

$$-\Delta y_{k+1}+\Delta y_k+rT\frac{m-MR}{m+M}\Delta\dot{y}_k+rT\frac{M(1+R)}{m+M}\Delta\dot{y}_{1k}-\frac{rTg\cos\alpha}{2}(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)=0$$

$$-\Delta\dot{y}_{k+1}+\frac{m-MR}{m+M}\Delta\dot{y}_k+\frac{M(1+R)}{m+M}\Delta\dot{y}_{1k}-g\cos\alpha\,(\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)=0 \qquad (21)$$

Acest sistem cu diferenţe finite se rezolvă considerînd soluţiile de forma

$$\Delta\dot{y}_{1k}=U\beta^k;\quad \Delta\dot{y}_k=V\beta^k;\quad \Delta y_k=W\beta^k;\quad \Delta t_k=Z\beta^k.$$

După înlocuire se obţine un sistem de ecuaţii liniare şi omogene în raport cu U, V, W, Z de forma

$$MarTU+(1-Ma)\,rTV+(1-\beta)\,W-\frac{rTg\cos\alpha}{2}(\beta-1)\,Z=0$$

$$MaU+(1-Ma-\beta)\,V-g\cos\alpha\,(\beta-1)\,Z=0 \qquad (22)$$

$$(1-ma)\sin dU+ma\sin dV+(\omega_n\cos d-\omega_n\beta)\,W+\left[\frac{\omega_n rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}b\beta+P_0\right]Z=0$$

$$[-\beta+(1-ma)\cos d]\,U+ma\cos dV-\omega_n\sin dW+(P_1\beta+P_2)\,Z=0$$

unde s-a notat

$$a=\frac{1+R}{m+M};\quad 1-Ma=\frac{m-MR}{m+M};\quad 1-ma=\frac{M-mR}{m+M};\quad b=2m+M-MR;\quad d=\omega_n rT$$

$$P_0=\omega_n^2\sin dy_0-\frac{\omega_n rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}(M-MR-2mR)\cos d-q(t_k)\sin d+g\cos\alpha\sin d$$

$$P_1=-\omega_n^2 y_0+q(t_k)-g\cos\alpha$$

$$P_2=\omega_n^2 y_0\cos d+\frac{\omega_n rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}(M-MR-2mR)\sin d-$$

$$-q(t_k)\cos d+g\cos\alpha\cos d.$$

Pentru ca sistemul (22) să admită soluții nenule trebuie să avem

$$\begin{vmatrix} MarT & (1-M_a)\,rT & 1-\beta & -\frac{rTg\cos\alpha}{2}(\beta-1) \\ Ma & 1-Ma-\beta & 0 & -g\cos\alpha\,(\beta-1) \\ (1-ma)\sin d & ma\sin d & \omega_n\cos d-\omega_n\beta & \frac{\omega_n rTg\cos\alpha}{2M(1+R)}b\beta+P_c \\ -\beta+(1-ma)\cos d & ma\cos d & -\omega_n\sin d & P_1\beta+P_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

Dezvoltînd acest determinant obținem ecuația caracteristică de gradul patru în β avînd forma

$$\beta^4+a_1\beta^3+a_2\beta^2+a_3\beta+a_4=0 \quad (24)$$

unde

$$a_1=-\frac{[-\omega_n^2y_0+q(t_k)]}{g\cos\alpha}\,\frac{M(1+R)^2}{(m+M)^2}\left(m\frac{\sin d}{d}+M\right)-$$

$$-\frac{2}{m+M}[(M-mR)\cos d+(m-MR)]$$

$$a_2=\frac{2[-\omega_n^2y_0+q(t_k)]}{g\cos\alpha}\,\frac{M(1+R)^2}{((m+M)}\left(m\frac{\sin d}{d}+M\cos d\right)-2\frac{M(1+R)}{m+M}\left[\frac{2R(m+M)}{M(1+R)}-\right.$$

$$\left.-\frac{m(1+R)}{m+M}\right]\cos d+\frac{1}{(m+M)}[mM(1+R)^2d\sin d+(m-MR)^2+(M-mR)^2]$$

$$a_3=-\frac{[-\omega_n^2y_0+q(t_k)]}{g\cos\alpha}\,\frac{M(1+R)^2}{(m+M)^2}\left(m\frac{\sin d}{d}+M\right)+\frac{2R}{m+M}[(m-MR)\cos d+$$

$$+(M-mR)]$$

$$a_4=+R^2.$$

Din ecuația caracteristică în β (24) rezultă condițiile de stabilitate a mișcărilor periodice. Dacă toate rădăcinile ecuației (24) sînt în modul subunitare, mișcările periodice vor fi asimptotic stabile. În caz că există o rădăcină în modul mai mare decît unitatea, mișcările periodice sînt nestabile. Pentru rădăcini egale în modul cu unitatea, studiul mișcării în primă aproximație nu este suficient. Condițiile de stabilitate coincid cu condițiile ca rădăcinile ecuației (24) să fie în modul subunitare. Aceste condiții rezultă aplicînd cunoscutul criteriu al lui Schur [7]

BIBLIOGRAFIE

1. Blehman I. I., Djanelidze G. Iu., *Vibraționnoe peremeșcenie*. Izd. Nauka, Moskva 1964.
2. Lavendel E. E., Optimalnîi zakon dvijenia lotka s zadannîmi predelami uskorenia pri vibrotransportirovke v rejime s podbrasîvaniem. Izv. AN SSSR, Mehanika i maşinostroenie, Nr. 6, 1964.

3. Gulbe A. K., Lavendel E. E., Uslovia suscestvovania i ustoicivosti dvijenia detali s podbrasîvaniem po vibrolotku pri odnovremennom deistvii sil suhogo i viazkogo trenia. Voprosî dinamiki i procinosti, 16, Riga, 1968.
4. Becherescu Doina, Heghedüş A., Studiul mişcărilor vibropercutante ale unei particule sub excitaţie periodică. St. Cerc. Mat., tom 22, Nr. 3, 1970.
5. Goncearevici I. F., Sergheev P. A., *Vibraţionnie maşini v stroitelstve.* Maşghiz, 1963.
6. Peterka F., Periodické kmitáni mechanické soustavy s vnitrnimi rázy. Stroinicky časopis, Nr. 3, 1965.
7. Kobrinski A. E., *Mehanizmî s uprughimi sviaziami..* Izd Nauka, Moskva, 1964.

К СКАЧКООБРАЗНОМУ ДВИЖЕНИЮ ЧАСТИЦЫ НА ВИБРОПЛАСТИНКЕ ПРИВОДИМОЙ В ДЕЙСТВИЕ ВИБРОГЕНЕРАТОРОМ

(РЕЗЮМЕ)

Рассматривается новая динамическая модель для исследования вибротранспорта частицы, учитывая движение массы платформы. Предполагая, что усилие виброгенератора воздействующего на платформу является произвольной периодической функцией, определяются периодические скачкообразные движения частицы по нормали к наклонной плоскости.

Методом возмущений устанавливаются условия устойчивости этих движений.

ÜBER DIE WURFBEWEGUNG EINES PUNKTES AUF EINER SCHWINGENDEN PLATTFORM.

(ZUSAMMENFASSUNG)

Ein neus dynamisches Modell zum Studium der Bewegung eines Punktes auf einem Schwingförderer wird betrachtet. Es wird vorausgesetzt, dass der Schwingungserreger mit einer allgemein periodischen Kraft auf die Plattform wirkt. Die zur Plattformebene senkrechte Komponente der periodischen Wurfbewegung des Punktes wird untersucht. Mit der Perturbationsmethode werden die Stabilitätsbedingungen dieser Bewegungen bestimmt.

OSCILAȚIILE UNUI VIBRATOR INERȚIAL ACȚIONAT DE UN MOTOR ELECTRIC

DE

I. GROȘANU

Fie vibratorul prezentat schematic în fig. 1, ale cărui oscilații verticale sînt produse de rotația masei neechilibrate m_0, avînd excentricitatea e_0. Masa neechilibrată este rotită cu unghiul φ, de un motor electric care dezvoltă un cuplu avînd momentul cunoscut $M(\dot{\varphi})$, în raport cu axa de rotație. Motorul electric se presupune fixat solidar cu vibratorul, avînd împreună cu aceasta masa m_1. Cu J s-a notat momentul de inerție al maselor în rotație, în raport cu axa de rotație.

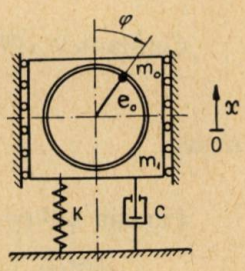

fig 1

Legăturile elastice ale vibratorului se presupun liniare, iar amortizările din sistem proporționale cu vitezele, atît în mișcarea de translație cît și în mișcarea de rotație.

Cu aceste considerații, ecuațiile de mișcare ale sistemului sînt:

$$\begin{aligned}(m_1+m_0)\ddot{x}+c\dot{x}+kx&=m_0e_0(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\\ J\ddot{\varphi}+c_1\dot{\varphi}&=m_0e_0(\ddot{x}+g)\sin\varphi+M(\dot{\varphi}).\end{aligned}\tag{1}$$

Pentru studiul regimurilor staționare periodice, apropiate de mișcările obținute pentru o turație constantă a motorului de acționare, se folosesc notațiile:

$$\begin{aligned}&m=m_1+m_0,\quad \omega_n^2=\frac{k}{m},\quad \mu=\frac{m_0}{m},\quad y=\frac{x}{\mu e_0},\quad \tau=\omega_n t\\ &\eta=\frac{\omega}{\omega_n},\quad \nu=\varepsilon\bar{\nu}=\frac{\mu m_0e_0^2}{J},\quad 2D=\frac{c}{m\omega_n},\quad \delta=\varepsilon\bar{\delta}=\frac{m_0e_0g}{J\omega_1},\\ &Q(\varphi')=\varepsilon\bar{Q}(\varphi')=\frac{M(\varphi')-C_1\omega_n\varphi'}{J\omega_n^2}.\end{aligned}\tag{2}$$

Cu ω s-a notat viteza unghiulară medie a motorului electric şi cu ε un parametru mic.

Considerînd notaţiile (2) sistemul autonom (1) devine

$$\begin{aligned} y''+2Dy'+y&=\varphi''\sin\varphi+\varphi'^2\cos\varphi \\ \varphi''&=\varepsilon(\bar{\nu}y''+\bar{\delta})\sin\varphi+\varepsilon\bar{Q}(\varphi'). \end{aligned} \tag{3}$$

Soluţiile sistemului (3) se determină aproximativ cu metoda parametrului mic, considerînd numai primele două aproximaţii. Astfel, se caută soluţii de forma :

$$\begin{aligned} y&=y^{(0)}+\varepsilon y^{(1)}+O(\varepsilon)^2 \\ \varphi&=\varphi^{(0)}+\varepsilon\varphi^{(1)}+O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Deoarece se studiază regimuri staţionare, pentru aproximaţia de ordinul zero, soluţiile particulare sînt :

$$\begin{aligned} y^{(0)}&=c_1^{(0)}\sin\eta\tau+c_2^{(0)}\cos\eta\tau \\ \varphi^{(0)}&=\eta\tau. \end{aligned} \tag{5}$$

Constantele $c_1^{(0)}$ şi $c_2^{(0)}$ sînt date de

$$c_1^{(0)}=\frac{2D\eta^3}{R_0},\qquad c_2^{(0)}=\frac{\eta^2(1-\eta^2)}{R^0} \tag{6}$$

unde

$$R_0=(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2. \tag{7}$$

Funcţia $\varphi^{(1)}(\tau)$ se obţine rezolvînd ecuaţia

$$\varphi^{(1)\prime\prime}(\tau)=-\bar{\nu}\eta^2\,(c_1^{(0)}\sin\eta\tau+c_2^{(0)}\cos\eta\tau-\bar{\delta})\sin\eta\tau+\bar{Q}(\eta). \tag{8}$$

Pentru ca regimurile staţionare să fie periodice se impune condiţia

$$-\frac{\bar{\nu}\eta^2}{2}c_1^{(0)}+\bar{Q}(\eta)=0 \tag{9}$$

care înmulţită cu ε, conduce la egalitatea

$$\frac{\nu D\eta^5}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}=Q(\eta). \tag{10}$$

Dacă condiţia (9) este satisfăcută, $\varphi^{(1)}$ are expresia

$$\varphi^{(1)}=\frac{\bar{\nu}}{8}c_2^{(0)}\sin 2\eta\tau-\frac{\bar{\nu}}{8}c_1^{(0)}\cos 2\eta\tau-\frac{\bar{\delta}}{\eta^2}\sin\eta\tau. \tag{11}$$

Considerînd numai primele două aproximaţii, viteza unghiulară $\varphi'(\tau)$ este dată de :

$$\varphi'(\tau)=\eta-\frac{\delta}{\eta}\cos\eta\tau+\frac{\nu\eta}{4}(c_1^{(0)}\sin 2\eta\tau+c_2^{(0)}\cos 2\eta\tau). \tag{12}$$

În aproximația de ordinul întîi, pentru deplasarea $y^{(1)}$, se obține expresia

$$y^{(1)} = c_1^{(1)} \sin \eta\tau + c_2^{(1)} \cos \eta\tau + c_3^{(1)} \sin 2\eta\tau + c_4^{(1)} \cos 2\eta\tau + \\ + c_5^{(1)} \sin 3\eta\tau + c_6^{(1)} \cos 3\eta\tau \tag{13}$$

unde:

$$c_2^{(1)} = -\frac{1}{16}\bar{\nu}\,(c_2^{(0)2} - c_1^{(0)2})$$

$$c_1^{(1)} = \frac{2}{16}\bar{\nu} c_1^{(0)} c_2^{(0)}$$

$$c_3^{(0)} = -4\bar{\delta}\frac{D\eta}{R_2}, \quad c_4^{(1)} = -2\bar{\delta}\frac{1-4\eta^2}{R_2} \tag{14}$$

$$c_5^{(1)} = \frac{9}{16}\bar{\nu}\frac{\eta^2}{R_3}[(1-9\eta^2)\, c_1^{(0)} + 6D\eta c_2^{(0)}]$$

$$c_6^{(1)} = \frac{9}{16}\bar{\nu}\frac{\eta^2}{R_3}[(1-9\eta^2)\, c_2^{(0)} - 6D\eta c_1^{(0)}]$$

$$R_s = (1-s^2\eta^2)^2 + 4s^2D^2\eta^2, \quad s = 2, 3.$$

Considerînd curba

$$\Gamma(\eta) = \frac{\nu D\eta^5}{R_0}. \tag{15}$$

valorile vitezei unghiulare medii η pentru care au loc regimuri staționare periodice cu perioada $T = \frac{2\pi}{\eta}$, reprezintă abscisele punctelor de contact ale curbelor $\Gamma(\eta)$ și $Q(\eta)$.

Derivînd relația (15) se obține

$$\Gamma' = \frac{d\Gamma}{d\eta} = \nu D\frac{\eta^4[\eta^4 - 6(1-2D^2)\eta^2 + 5]}{R_0^2}. \tag{16}$$

Din (15) și (16) se găsește:

$$\Gamma(0) = 0, \quad \Gamma(\infty) = \infty, \quad \Gamma(1) = \frac{\nu}{4D}, \tag{17}$$

$$\Gamma'(0) = 0, \quad \Gamma'(\infty) = \nu D, \quad \Gamma'(1) = 3\frac{\nu}{4D}$$

Curba $\Gamma(\eta)$ are extremele date de valorile lui η care satisfac ecuațiile:

$$\eta^4 = 0, \quad \eta^4 - 6(1-2D^2)\eta^2 + 5 = 0. \tag{18}$$

Cu excepția lui $\eta = 0$ și $D = 0$, curba $\Gamma(\eta)$ are valori extreme pentru

$$\eta' = \sqrt{3(1-2D^2) - \sqrt{9(1-2D^2)^2 - 5}} \tag{19}$$

$$\eta'' = \sqrt{3(1-2D^2) + \sqrt{9(1-2D^2)^2 - 5}}.$$

Aceste valori sînt reale dacă $D < 0{,}7$.

În cazul cînd factorul de amortizare D are valoarea

$$D=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}} \tag{20}$$

rădăcinile η' și η'' sînt egale avînd valoarea $\eta^*=\sqrt[4]{5}$, pentru care curba $\Gamma(\eta)$ are un maxim.

Dacă $D<0{,}7$, curba $\Gamma(\eta)$ are pentru valoarea η' un maxim, iar pentru η'' un minim. În acest caz are forma din fig. 2.

În această figură s-a reprezentat și o curbă $Q(\eta)$. Reese că sînt posibile cel mult trei rădăcini reale, distincte, diferite de zero ale ecuației $\Gamma(\eta)=Q(\eta)$, notate cu

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3\quad(\eta_1<\eta_2<\eta_3).$$

Dacă $D>0{,}7$, curba $\Gamma(\eta)$ nu are extreme. În fig. 3, s-a reprezentat curba Γ considerînd cazul cînd $D=1$ și $\nu=0{,}5$.

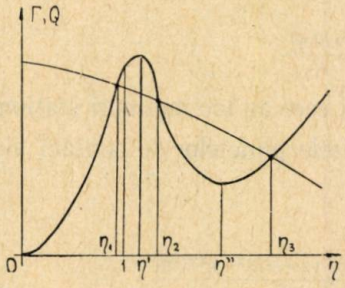

Fig 2

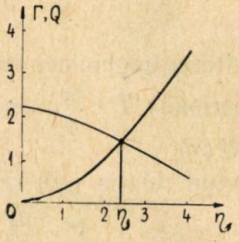

Fig.3

Însemnează că în cazul cînd $D>0{,}7$, ecuația $\Gamma(\eta)=Q(\eta)$ admite o singură rădăcină reală, diferită de zero.

Aceste concluzii s-au obținut considerînd cazul cînd $Q(\eta)$ este monoton descrescătoare.

Pentru vibratorul din fig. 1, sînt posibile deci cel mult trei regimuri staționare periodice corespunzătoare valorilor η_1, η_2, η_3 ale vitezei unghiulare medii η. Însă aceste regimuri staționare nu sînt toate stabile.

Pentru studiul stabilității se presupune că „momentul" adimensional $\Gamma(\eta)$ care frînează mișcarea maselor în rotație și „momentul" adimensional $Q(\eta)$ care accelerează această mișcare, rămîn neschimbate. În această situație se consideră unul din regimurile staționare periodice corespunzător unei rădăcini nenule ale ecuației (10), notată cu η. Se perturbă această valoare cu o cantitate mică, pozitivă, $\Delta\eta$. În urma acestei perturbări apare un regim nestaționar. Dacă pentru $\tau\to\infty$ regimul nestaționar tinde la regimul staționar corespun-

zător valorii η, acest regim staționar periodic, este stabil. În caz contrar regimul staționar este instabil. Considerînd aproximațiile

$$\Gamma(\eta+\Delta\eta)=\Gamma(\eta)+\frac{d\Gamma}{d\eta}\Delta\eta+O(\Delta^2\eta)$$
$$Q(\eta+\Delta\eta)=Q(\eta)+\frac{dQ}{d\eta}\Delta\eta+O(\Delta^2\eta) \tag{21}$$

și

$$\Gamma(\eta-\Delta\eta)=\Gamma(\eta)-\frac{d\Gamma}{d\eta}\Delta\eta+O(\Delta^2\eta) \tag{22}$$
$$Q(\eta-\Delta\eta)=Q(\eta)-\frac{dQ}{d\eta}\Delta\eta+O(\Delta^2\eta)$$

dacă

$$\frac{d\Gamma}{d\eta}>\frac{dQ}{d\eta} \tag{23}$$

ținînd seama că $\Gamma(\eta)=Q(\eta)$, rezultă

$$\Gamma(\eta+\Delta\eta)>Q(\eta+\Delta\eta)$$
$$\Gamma(\eta-\Delta\eta)<Q(\eta-\Delta\eta) \tag{24}$$

Însemnează că dacă este satisfăcută inegalitatea (23) pentru o rădăcină simplă a ecuației (10), atunci după perturbarea cu $+\Delta\eta$, mișcarea de rotație va fi frînată, iar după perturbarea cu $-\Delta\eta$, accelerată, regimul nestaționar tinzînd în ambele cazuri la regimul staționar avut de sistem înainte de perturbare. Inegalitatea (23), reprezintă condiția de stabilitate a regimurilor staționare.

În fig. 4 s-a reprezentat o curbă $\Gamma'(\eta)$ considerînd cazul cînd $D<0{,}7$ și o curbă $Q'(\eta)$. Prin intersecțiile acestor curbe s-au determinat domeniile de stabilitate, notate cu S și cele de instabilitate notate cu I.

Analog s-a procedat în fig. 5 considerînd cazul cînd $D=1$ și $\nu=0{,}5$.

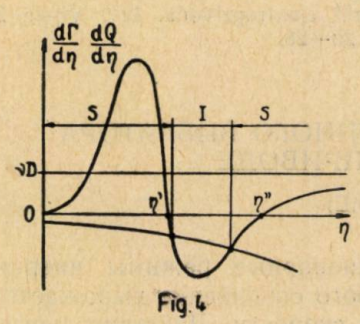

Fig. 4

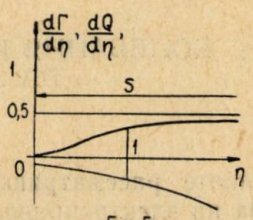

Fig. 5

În concluzie, pentru sistemul electromecanic studiat reese:

— Cele mai pronunţate neuniformităţi ale vitezei unghiulare apar în apropierea domeniului de rezonanţă al sistemului unde şi amplitudiniile deplasării masei m_1 sînt maxime.

— Dacă $D<0{,}7$, ecuaţia algebrică (10) are cel mult trei rădăcini reale distincte, diferite de zero.

Pentru fiecare din aceste valori este posibilă un regim staţionar periodic.

— Folosind condiţia de stabilitate (23) rezultă că regimurile staţionare corespunzătoare valorilor η_{i1} şi η_{i3} sînt stabile iar regimul staţionar corespunzător valorii η_{i2} este instabil.

BIBLIOGRAFIE

1. Altsuli B. A., O vzaimodeistvii kolebatelnoi sistemî s ustocinikom energii pri nalicii vnutrennego treniia. Trudî MIITa, vîp. 236 „Voprosî prikladnoi mehaniki" M. 1967.
2. Christ H., Stationärer und instationärer Betrieb eines federnd gelagerten, unwuchtigen Motors. Dissertation der Technischen Hochshule Karlsruhe, 1966.
3. Christ H., Das Betriebsverhalten von Schwingförderrinen und Schwingsieben beim Antrieb durch einem Gleichstrom Nebenschluss Motor, VDI-Z, Bd. 110, Nr. 3 Seite 81—120, Januar 1968.
4. Christ H., An- und Auslauf eines gedämpften unwuchterregten Schwingers. VDI-Berichte Nr. 135 1969.
5. Grosanu I., Contribuţii privind studiul mişcărilor staţionare şi nestaţionare ale sistemelor mecanice excitate inerţial, acţionate cu motoare electrice. Rezumatul tezei de doctorat. I. P. Timişoara 1970.
6. Hübner W., Die Wechselwirkung zwischen Schwinger und Antrieb bei erzwungenen Schwingungen. Ing. Arch. Nr. 6, 1965.
7. Kononenko V. O., Nekotorîe avtonomnîe zadaci teorii nelineinîh kolebanii. Trudî mejdunarodnovo simpoziuma po nelineinîm kolebaniia, T. 3, Kiev, Izd. vo AN SSSR, 1963.
8. Livovici A. Iu., Mehaniceskie kolebaniia vozbujdaemîe elektrodvigatelem. Vesnik Leningradskogo Universiteta. Nr. 7 Vip. 2, 1968.
9. Panovko Ia. G., Gubanova I. I., *Ustoicivosti i kolebaniia uprugih sistem.* Izd. vo „Nauka" ,Moskva, 1967.
10. Racord Y., *Dinamique gènèrale des vibrations*, Massou, Paris, 1949.
11. Silas Gh., Grosanu I., Studiul regimurilor staţionare ale unui vibrator acţionat cu un motor electric de curent continuu. A II-a Conferinţă de mecanică, tehnică, Bucureşti, 29—31 oct. 1970.
12. Sizov M. B., Dinamica uprugoi sistemî elektroprivoda. Izv. Visşih Zavedenii Maşinostroenie, Nr. 10. 1969. str. 25—28.

КОЛЕБАНИЯ ИНЕРЦИОННОГО ВИБРАТОРА НА ЭЛЕКТРОПРИВОДЕ

(РЕЗЮМЕ)

В работе рассматриваются стационарные режимы инерционного вибратора на электроприводе, у которого соединение выражается нелинейной функцией мгновенной угловой скорости. Действительные корни

уравнения (10), отличные от нуля, характеризуют стационарные периодические режимы.

Указано так же, что для корней η_1 и η_3 соответствуют устойчивые стационарные режимы, а для η_2 неустойчивый стационарный режим ($\eta_1<\eta_2<\eta_3$).

DIE SCHWINGUNGEN EINES UNWUCHTERREGTEN VERBANDES WELCHER MIT EINEM ELEKTRISCHEN MOTOR ANGETRIEBEN WIRD

(ZUSAMMENFASSUNG)

Im Beitrag werden die stationären Bewegungszustände eines unwuchterregten Schwingers untersucht, welcher mit einem elektrischen Motor angetrieben wird. Das Antriebsmoment des Motors ist als nichtlineare Funktion der momentanen Winkelgeschwindigkeit bekannt.

Die von Null verschiedenen reelen Wurzeln der Gleichung (10) bestimmen die stationären periodischen Bewegungszustände. Es wird gezeigt, dass den Wurzeln η_1 und η_3 stationäre stabile und der Wurzel η_2 stationäre instabile Bewegungsregime entsprechen ($\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$).

INFLUENȚA UNOR PARAMETRI AI SUSPENSIEI ELASTICE ASUPRA VIBRAȚIILOR LATERALE LA LOCOMOTIVE DIESEL ELECTRICE 0-6-0 DA

DE

T. GLIGOR, C. URSU, D. UROȘU

1. INTRODUCERE

Locomotiva Diesel-electrică 0-6-0 DA este o construcție modernă, alcătuită din trei părți componente: cutia și cele două boghiuri, legate elastic între ele printr-o cuplă elastică transversală.

Pentru asigurarea unui mers lin, la viteze cuprinse între zero și peste 100 km/h, ea este prevăzută cu două trepte de suspensie. Prima numită și suspensie centrală, este situată între cutie și boghiuri. Ea este alcătuită din 4 perechi de arce cu foi, cîte două pentru fiecare boghiu. Această treaptă permite sprijinirea cutiei pe boghiuri prin intermediul unui leagăn. Cea de a doua treaptă de suspensie este situată între boghiuri și osii. Ea este constituită din 24 arce elicoidale, cîte patru pentru fiecare osie, respectiv cîte două pentru fiecare parte a osiei.

Studierea dinamicii laterale a acestei locomotive este necesară deoarece, se are în vedere tendința continuă de creștere a vitezei de circulație, tendință care este strîns legată de mersul lateral lin al locomotivei.

Cercetările din acest domeniu arată că această calitate a mersului este determinată de accelerațiile vibrațiilor și de vitezele lor de variație, care la rîndul lor depind de pulsațiile vibrațiilor respective.

Avînd în vedere acest lucru, în cele ce urmează, vom analiza influența unor parametri ai suspensiei locomotivei asupra pulsațiilor vibrațiilor laterale.

Pentru aprecierea comportării leagănului la vibrațiile laterale ale locomotivei s-a introdus parametrul L, [3] care reprezintă lungimea pendulului matematic sincron pendulului fizic (leagănului la deviația laterală a locomotivei). Acest parametru depinde de dimensiunile constructive ale leagănului, care diferă de la locomotivă la locomotivă.

Pentru studiul influienței repartiției globale a părților suspendate elastic între cutie și boghiuri, s-a introdus coeficientul $\eta = \frac{2m}{M_c + 2m}$, unde m este masa părții suspendate a unui boghiu iar M_c, masa cutiei locomotivei. Aprecierea

calitativă a suspensiei se va face prin introducerea parametrului $p=\frac{\theta_B}{\theta_c}$, unde $\theta_B=\frac{f_B}{f_{tot}}100$; $\theta_c=\frac{c}{f_{tot}}100$ iar f_B, f_c, sînt săgeţile statice corespunzătoare celor două trepte de suspensie, şi f_{total} săgeata statică totală, care este de asemeni în funcţie de tipul locomotivei.

În vederea stabilirii ecuaţiilor diferenţiale ale vibraţiilor locomotivei, vom admite următoarele ipoteze de calcul :

— Locomotiva în ansamblu ca şi cutia şi boghiurile sînt simetrice faţă de planurile verticale, transversale şi longitudinale, care trec prin centrele de greutate respective.

— Rigiditatea suspensiei locomotivei fiind mult mai mică decît rigiditatea căii de rulare, vom considera calea rigidă.

— Locomotiva se mişcă pe o cale rectilinie, cu viteză constantă şi nu este supusă acţiunii vagoanelor.

— Nu se ţine cont de proprietăţile elastice ale părţilor suspendate şi nici de proprietăţile inerţiale ale elementelor elastice.

În baza ipotezelor de mai sus, modelul mecanic al locomotivei este dat de fig. 1 iar drept sisteme de axe se aleg : un sistem absolut $o_1x_1y_1z_1$ cu originea o_1 în centrul de greutate a cutiei, care se mişcă rectiliniu şi uniform odată cu locomotiva şi cîte un sistem de axe mobil, pentru cutie şi boghiuri, cu originile în centrele de greutate respective. Sensul axelor se alege în aşa fel ca axa o_1x_1 să fie orientată în lungul căii şi în sensul de înaintare a locomotivei, axa o_1y_1 spre firul căii din dreapta, iar axa o_1z_1 în jos.

Pentru determinarea poziţiei sistemului din fig. 1 se aleg următoarele coordonate generalizate : deplasările de translaţie a celor trei părţi suspendate

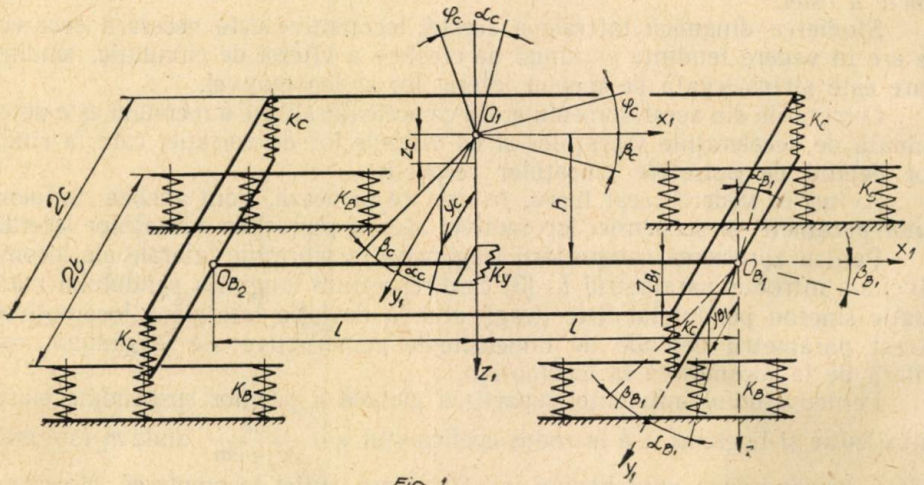

Fig. 1.

de-a lungul axelor o_1y_1 și o_1z_1 și rotirile în jurul axelor, notîndu-le cu indice c pentru cutie și cu B_1 și B_2 pentru boghiuri.

$$\text{deplasări} \begin{cases} o_1y_1(y_c,\ y_{B_1},\ y_{B_2}) \\ o_1z_1(z_c,\ z_{B_1},\ z_{B_2}) \end{cases} \quad \text{rotiri} \begin{cases} o_1x_1(\alpha_c, \alpha_{B_1},\ \alpha_{B_2}) \\ o_1y_1(\varphi_c) \\ o_1z_1(\beta_c,\ \beta_{B_1},\ \beta_{B_2}) \end{cases} \tag{1}$$

2. STABILIREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

Pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor libere neamortizate ale locomotivei, folosim ecuațiile lui Lagrange de speța II-a :

Coordonatele absolute ale oricărui punct de pe cutia și boghiurile locomotivei se pot calcula cu ajutorul relațiilor :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x_i\alpha_1 + y_i\alpha_2 + z_i\alpha_3 \\ y_1 &= y_0 + x_i\beta_1 + y_i\beta_2 + z_i\beta_3 \\ z_1 &= z_0 + x_i\gamma_1 + y_i\gamma_2 + z_i\gamma_3 \end{aligned} \tag{2}$$

unde :

$x_0,\ y_0,\ z_0$ — sînt coordonatele absolute ale originii sistemului de axe mobil ;

$x_i,\ y_i,\ z_i$ — sînt coordonatele relative ale unui punct de pe cutie sau boghiuri ;

$\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i$ — $i = 1, 2, 3$ sînt cosinușii directori din tabelul 1 a căror exprimare în funcție de rotiri este dată în tabelul 2 și 3, atît pentru cutie cît și pentru boghiuri [9].

Tabelul 1

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}_1$	α_1	α_2	α_3
$\bar{j}_1$	β_1	β_2	β_3
$\bar{k}_1$	γ_1	γ_2	γ_3

Tabelul 2

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}_1$	1	$-\beta_c$	φ_c
$\bar{j}_1$	β_c	1	$-\alpha_c$
$\bar{k}_1$	$-\varphi_c$	α_c	1

Tabelul 3

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}_1$	1	$-\beta_{B_i}$	0
$\bar{j}_1$	β_{B_i}	1	$-\alpha_{B_i}$
$\bar{k}_1$	0	α_B	1

(3)

Energia cinetică a locomotivei va fi :

$$E_c = \frac{1}{2}M_c(\dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2}m(\dot{y}_{B_1}^2 + \dot{y}_{B_2}^2 + \dot{z}_{B_1}^2 + \dot{z}_{B_2}^2) + \frac{1}{2}I_{Gx}^c\dot{\alpha}_c^2 + \frac{1}{2}I_{Gy}^c\dot{\varphi}_c^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}I_{Gx}^c\dot{\beta}_c^2 + \frac{1}{2}I_{Gx}^B(\dot{\alpha}_{B_1}^2 + \dot{\alpha}_{B_2}^2) + \frac{1}{2}I_{Gz}^B(\dot{\beta}_{B_1}^2 + \dot{\beta}_{B_2}^2) \tag{4}$$

Energia potenţială a sistemului se determină ca sumă a energiilor potenţiale, datorită deformaţiilor elastice ale fiecărui arc din suspensie. Calculînd deformaţia Δh *a* fiecărui arc în parte, cu ajutorul relaţiilor (3) şi tabelelor 2 şi 3, energia potenţială respectivă va fi : $\frac{1}{2} k (\Delta h)^2$. Energia potenţială a sistemului va fi :

$$E_p = \frac{k_{cz}}{2} \{[z_c - l\varphi_c + b\alpha_c - b\alpha_{B_1} - z_{B_1}]^2 + [z_c - l\varphi_c - b\alpha_c + b\alpha_{B_1} - z_{B_1}]^2 +$$

$$+ [z_c + l\varphi_c + b\alpha_c - b\alpha_{B_2} - z_{B_2}]^2 + [z_c + l\varphi_c - b\alpha_c - b\alpha_{B_2} - z_{B_2}]^2\} +$$

$$+ 2\frac{1}{2} k_{cy} \{[y_c - h\alpha_c + l\beta_c - y_{B_1}]^2 + [y_c - h\alpha_c - l\beta_c - y_{B_2}]^2\} +$$

$$+ \frac{1}{2} k'_{Bz} [(z_{B_1} + c\alpha_{B_1})^2 + (z_{B_1} - c\alpha_{B_1})^2 + (z_{B_2} + c\alpha_{B_2})^2 + (z_{B_2} - c\alpha_{B_2})^2] +$$

$$+ \frac{1}{2} k''_{Bz} [(z_{B_1} + c\alpha_{B_1})^2 + (z_{B_1} - c\alpha_{B_1})^2 + (z_{B_2} + c\alpha_{B_2})^2 + (z_{B_2} - c\alpha_{B_2})^2] +$$

$$+ 2\frac{1}{2} k'_{By} [(y_{B_1} + a'_1\beta_{B_1})^2 + (y_{B_2} - a'_1\beta_{B_2})^2] + 2\frac{1}{2} k''_{By} [(y_{B_1} - a'_2\beta_{B_1})^2 + (y_{B_2} + a'_2\beta_{B_2})^2] +$$

$$+ 2\frac{1}{2} k'_{Bx} c^2 (\beta^2_{B_1} + \beta^2_{B_2}) + \frac{1}{2} k_y [y_1 - y_2 - l(\beta_{B_1} + \beta_{B_2})]^2 \qquad (5)$$

unde :

k_{cy} — este constanta elastică transversală a suspensiei centrale [3] ce se calculează cu formula ;

$$k_{cy} = \frac{G \text{ cutie}}{4L};$$

k_y — este constanta elastică echivalentă a cuplei elastice transversale dintre boghiuri. Această cuplă [7] cu caracteristica cea din fig.2, a fost înlocuită cu o cuplă elastică, cu caracteristica liniară, a cărei constantă elastică s-a calculat pentru o curbă cu raza de 150 m [8] ;

$k'_{Bx}, k'_{By}, k'_{Bz}$ — constantele elastice echivalente din punctul de articulaţie a balacierului, după direcţia axelor de coordonate, corespunzătoare suspensiei primelor două osii ale boghiului ;

$k''_{Bx}, k''_{By}, k''_{Bz}$ — constantele elastice echivalente, după direcţia axelor de coordonate, corespunzătoare suspensiei celei de a 3-a osii ;

a'_1, a'_2 — sînt distanţele de la aceste suspensii la originea sistemului de axe legat de boghiu, ca în fig. 3.

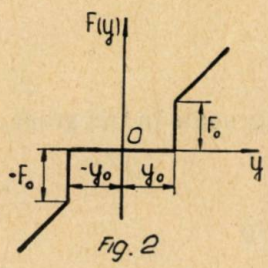

Fig. 2

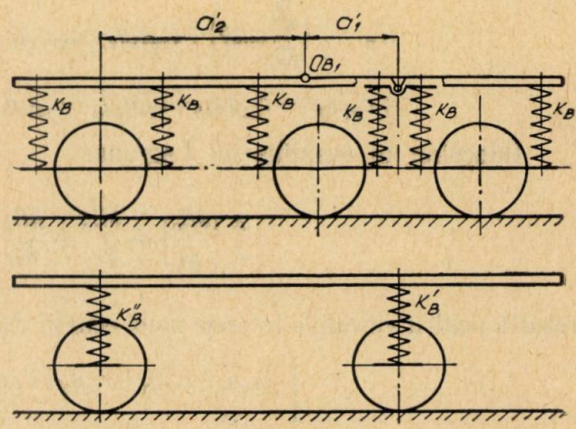

Fig. 3

Pentru scrierea mai ușoară a celor două energii, vom introduce noi coordonate generalizate, legate de primele prin relațiile:

$$\varphi=q_1\,;\quad \alpha_c=q_2\,;\quad y_{B_1}+y_{B_2}=2q_3\,;\quad \alpha_{B_1}+\alpha_{B_2}=2q_4$$
$$\beta_{B_1}-\beta_{B_2}=2q_5\,;\quad \beta_c=q_6\,;\quad y_{B_1}-y_{B_2}=2q_7\,;\quad \beta_{B_1}+\beta_{B_2}=2q_8 \tag{6}$$
$$z_c=q_{10}\,;\quad \varphi_c=q_{11}\,;\quad z_{B_1}+z_{B_2}=2q_{12}\,;\quad z_{B_1}-z_{B_2}=2q_{13}$$

$\alpha_{B_1}-\alpha_{B_2}=2q_9$ unde am înlocuit $y_c=-L\varphi$

L fiind lungimea pendulului matematic sincrom [3].

$$c_{11}=4k_{cy}L^2\,;\quad c_{22}=4\,(b^2k_{cz}+b^2k_{cy})\,;\quad c_{33}=4\,(k'_{By}+k''_{By}+k_{cy})$$
$$c_{44}=c_{99}=4\,[b^2k_{cz}+c^2\,(k'_{Bz}+k''_{Bz})]\,;\quad c_{55}=4\,[k'_{By}a'^2_1+k''_{By}a'^2_2+c^2\,(k'_{Bx}+k''_{Bx})]$$
$$c_{66}=4k_{cy}l^2\,;\quad c_{77}=4\,(k'_{By}+k''_{By}+k_{cy}+k_y)\,;\quad c_{88}=c_{55}+4l^2k_y \tag{7}$$
$$c_{1010}=-c_{1012}=4k_{cz}\,;\quad c_{1111}=4k_{cz}l^2\,;\quad c_{1212}=c_{1313}=4\,(k_{cz}+k'_{Bz}+k''_{Bz})$$
$$c_{24}=-4k_{cz}b^2\,;\quad c_{12}=4k_{cy}Lh\,;\quad c_{13}=4k_{cy}L\,;\quad c_{23}=4k_{cy}h$$
$$c_{67}=-c_{1113}=-4k_{cy}l\,;\quad c_{35}=4\,(k'_{By}a'_1-k''_{By}a'_2)\,;\quad c_{78}=c_{35}+k_yl$$

$$a_{11}=ML^2\,;\quad a_{22}=I^c_{Gx}\,;\quad a_{33}=a_{77}=a_{1212}=a_{1313}=2m\,;\quad a_{44}=a_{99}=2I^B_{Gx}$$

$$a_{55}=a_{88}=2I^B_{Gz}\,;\quad a_{1010}=M\,;\quad a_{1111}=I^B_{Gy}\,;\quad a_{66}=I^c_{Gz}$$

cele două energii se vor putea scrie:

$$E_c=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{13}a_{ii}\dot{q}_i^2 \tag{8}$$

$$E_p=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{13}c_{ii}q_i^2\right)+c_{12}q_1q_2+c_{13}q_1q_3+c_{23}q_2q_3+c_{24}q_2q_4+$$

$$+c_{67}q_6q_7+c_{35}q_3q_5+c_{78}q_7q_8+c_{1012}q_{10}q_{12}+c_{1113}q_{11}q_{13}$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_i}+\frac{\partial E_p}{\partial q_i}=0$$

rezultă pentru vibrațiile laterale nouă ecuații diferențiale grupate în trei grupe :

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1+c_{11}q_1+c_{12}q_2+c_{13}q_3=0 \\ a_{22}\ddot{q}_2+c_{21}q_1+c_{22}q_2+c_{23}q_3+c_{24}q_4=0 \\ a_{33}\ddot{q}_3+c_{31}q_1+c_{32}q_2+c_{33}q_3+c_{35}q_5=0 \\ a_{44}\ddot{q}_4+c_{42}q_2+c_{44}q_4=0 \\ a_{55}\ddot{q}_5+c_{53}q_3+c_{55}q_5=0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_{66}\ddot{q}_6+c_{66}q_6+c_{67}q_7=0 \\ a_{77}\ddot{q}_7+c_{76}q_6+c_{77}q_7+c_{78}q_8=0 \\ a_{88}\ddot{q}_8+c_{87}q_7+c_{88}q_8=0 \end{cases} \tag{10}$$

$$a_{99}\ddot{q}_9+c_{99}q_9=0 \tag{11}$$

unde : $c_{ij}=c_{ji}$

3. INTEGRAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE. CONCLUZII

Pentru integrarea acestor sisteme de ecuații diferențiale, alegem soluții de forma : $q_i=A_i \sin(\omega t+\varphi)$; $i=1, 2, \cdots, 9$ care înlocuite în ecuațiile (9), (10) (11) conduc la următoarele ecuații caracteristice :

$$\Delta=\begin{vmatrix} b_{11}-\omega^2 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22}-\omega^2 & b_{23} & b_{24} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\omega^2 & 0 & b_{35} \\ 0 & b_{42} & 0 & b_{44}-\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_{53} & 0 & b_{55}-\omega^2 \end{vmatrix}=0 \tag{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{66}-\omega^2 & b_{67} & 0 \\ b_{76} & b_{77}-\omega^2 & b_{78} \\ 0 & b_{87} & b_{88}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

$$b_{99}-\omega^2=0 \tag{14}$$

unde s-a notat:

$$b_{ii}=\frac{c_{ii}}{a_{ii}};\quad b_{ij}=\frac{c_{ij}}{a_{ii}};\quad b_{ij}\neq b_{ji} \tag{15}$$

Pentru a vedea influența pe care o exercită cei trei parametri L, η și p asupra pulsațiilor proprii ale vibrațiilor laterale, un calcul manual este imposibil, de aceea s-a recurs la ajutorul mașinilor electronice de calcul MECIPT-1 și IBM-360 a centrului de calcul al Universității București.

În funcție de acești parametrii ținînd seama de dimensiunile constructive ale locomotivei [7], coeficienții (15) sînt:

$$b_{11}=\frac{9{,}81}{L};\quad b_{22}=20\,850\,(1+p)\,(1-\eta);\quad b_{33}=5\,830\,\frac{1+p}{p}+11\,\frac{1-\eta}{\eta};$$

$$b_{44}=b_{99}=54\,970\,(1+p)\,(1-\eta)+30\,152\,\frac{\eta\,(1+p)}{p};\quad b_{55}=13\,752\,\frac{\eta\,(1+p)}{p};$$

$$b_{66}=264\,\frac{1-\eta}{L};\quad b_{77}=b_{33}+14{,}3\,\frac{1}{\eta};\quad b_{88}=b_{55}+189{,}8;\quad b_{12}=\frac{17{,}16}{L^2}; \tag{16}$$

$$b_{21}=28\,(1-\eta);\quad b_{13}=\frac{9{,}81}{L^2};\quad b_{31}=9{,}8\,\frac{1-\eta}{\eta};\quad b_{24}=-20\,850\,(1+p)\,(1-\eta);$$

$$b_{42}=-54\,970\,(1+p)\,(1-\eta);\quad b_{35}=175\,\frac{1+p}{p};\quad b_{53}=130{,}4\,\frac{\eta\,(1+p)}{p};$$

$$b_{67}=-2{,}67\,\frac{1-\eta}{L};\quad b_{76}=-41{,}28\,\frac{1-\eta}{L\eta};\quad b_{87}=b_{53}+11{,}27;\quad b_{78}=b_{35}+15{,}1\,\frac{1}{\eta}.$$

Rezolvînd ecuațiile caracteristice (12), (13), (14) pentru următoarele valori date parametrilor.

$L=10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ cm.

$$p=\frac{10}{90};\ \frac{25}{75};\ \frac{50}{50}$$

$\eta=0{,}21,\ 0{,}27,\ 0{,}31$

variația pulsațiilor vibrațiilor laterale este reprezentată în figurile 4—12.

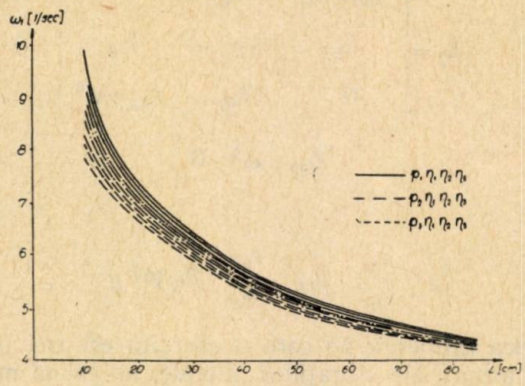

Fig 4.

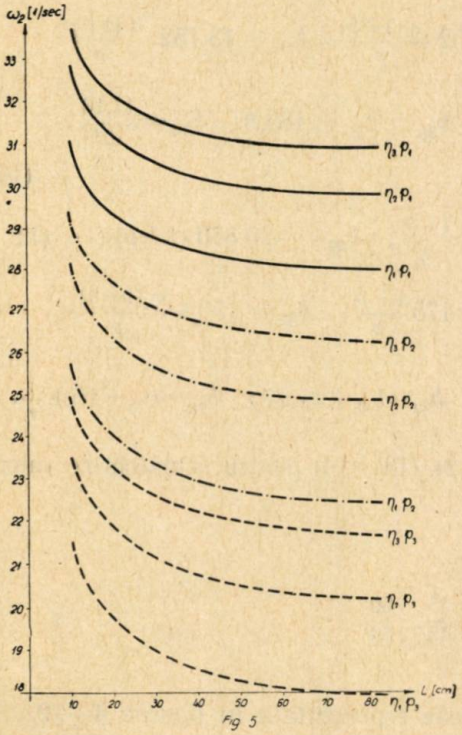

Fig 5

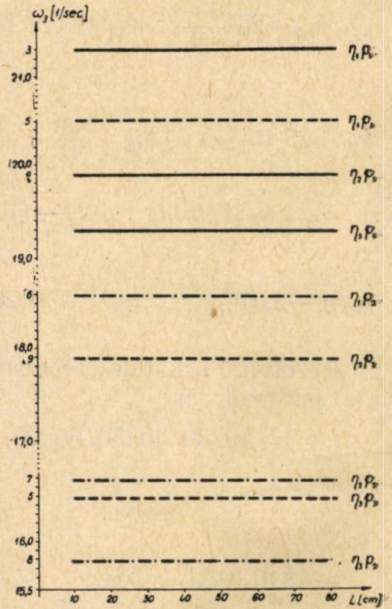

Fig 6

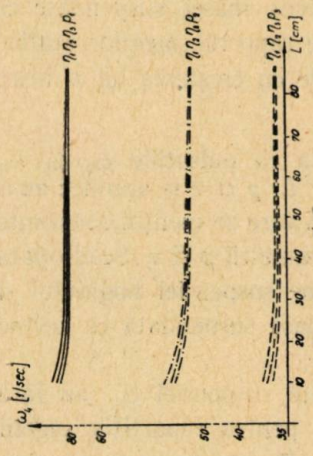

Fig 7

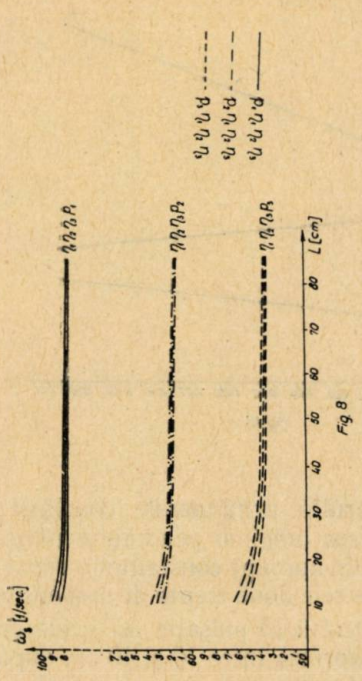

Fig 8

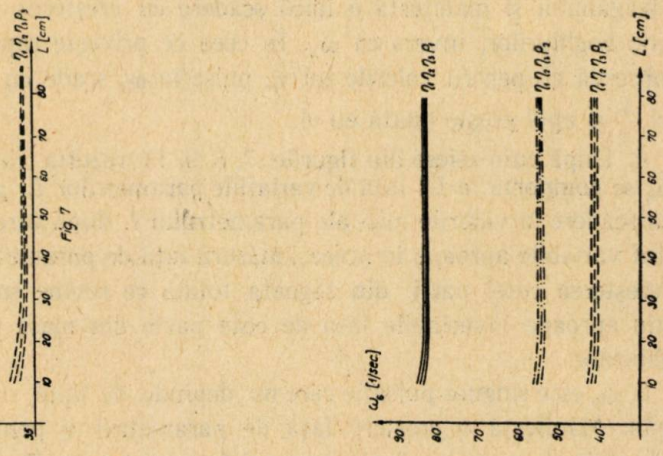

Fig 9

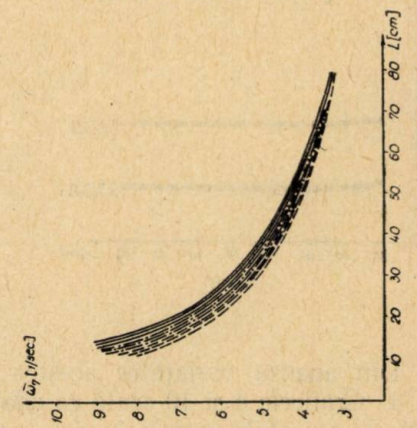

Fig 10

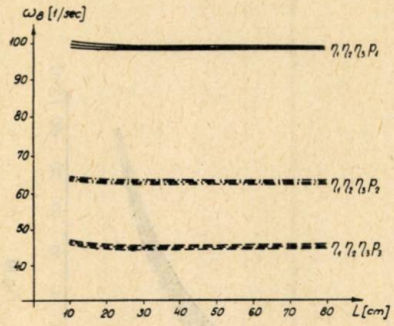

Fig 11

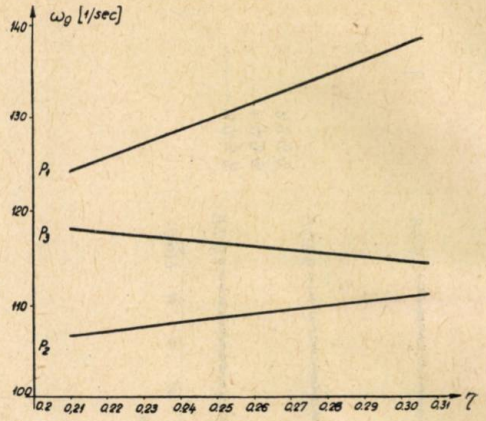

Fig. 12

Din analiza variațiilor acestor pulsații, rezultă următoarele concluzii :

1. Graficele 4 și 10 arată că odată cu creșterea lungimii pendulului matematic L, pulsațiile proprii ω_1 și ω_7 scad. Ele rămîn aproape constante la repartiția săgeții statice totale și a masei suspendate, pe cele două trepte de suspensie.

2. În ce privește diagramele din figura 5 rezultă că pulsația ω_2 scade cu creșterea parametrului L pentru gama de valori cuprinsă între 10 și 40 cm după care se menține aproape constantă. Manifestă o foarte mică creștere odată cu creșterea masei suspendate ce revine boghiurilor și scade aproximativ cu 0,8Hz, cu creșterea cotei din săgeata totală ce revine suspensiei dintre boghiuri și osii.

3. Din diagrama 6 se vede că pulsația ω_3 este invariabilă față de construcția leagănului și manifestă o mică scădere cu creșterea masei suspendate ce revine boghiurilor, invers ca ω_2. În ceea ce privește raportul săgeților statice se observă că pentru valorile lui η, pulsația ω_3 scade cu creșterea lui p între $\frac{1}{9}$ și $\frac{1}{3}$ și apoi crește odată cu el.

4. După cum reiese din figurile 7, 8, 9, 11 rezultă că pulsațiile ω_4, ω_5, ω_6 și ω_8 se comportă la fel față de variațiile parametrilor L, p și η și anume : au o mică scădere la valorile mici ale parametrului L după care se mențin constante și sînt variabile aproape în aceeași măsură față de parametrii p și η. Scad odată cu creșterea cotei părți din săgeata totală ce revine suspensiei boghiului și rămîn aproape invariabile față de cota parte din masa suspendată ce revine boghiurilor.

5. ω_9 este singura pulsație care nu depinde de tipul suspensiei cu sau fără leagăn. Manifestă o creștere față de parametrul η pentru repartiția săgeții totale dată de p_1 și p_2 și o ușoară scădere pentru p_3. Pentru aceeași repartiție a masei suspendate, ω_9 scade cu creșterea săgeții statice între p_1 și p_2 ce revine boghiurilor și apoi crește cu valorile cuprinse între p_2 și p_3.

6. Cunoașterea pulsațiilor proprii ale locomotivei cît și felul cum ele sînt influențate de anumiți parametrii ce caracterizează construcția locomotivei, are importanță la proiectarea construcției pentru evitarea în primul rînd a multiplelor fenomene de rezonanță posibile, cît și pentru asigurarea unui regim de mișcare silențios.

BIBLIOGRAFIE

1. Л. А. Новиков, В влиянии отдельных параметров упругого подвешивание на боковые колебания вагонов Л.Н.Н.Ж.Т. вып. 246 — 1965.
2. В. В. Сучков, Исследование возможности снижения горизонтальной динамики четырехосных грузовых вагонов при повышенной скорости движения В.Н.И.И.Ж.Т. вып. 307 — 1965.
3. И. С. Доронин, Влияние элементов центрального подвешивания на боковые колебания пассажирского вагона «Вестник» В.Н.И.И.Ж.Т. № 3 — 1964.
4. Н. А. Ковалев, Боковые колебания подвижного состава, Транстелдориздат, Москва, 1957.
5. Я. Г. Пановко, *Основы прикладной теории упругих колебаний* — Машгиз, Москва, 1957.
6. C. M. Harris, C. E. Crede,. *Şocuri şi vibraţii*, vol. III, cap. 34, Ed. Tehnică Bucureşti, 1969.
7. Gh. Silaş, *Vibraţii mecanice*. Editura Tehnică, Bucureşti, 1968.
8. * * * Îndrumător de exploatare şi întreţinere a locomotivei Diesel-electrice 060-DA de 2 100 CP., Min. Căilor Ferate, Bucureşti 1967—68.
9. Динамико-прочностные испытания электропоезда ЭРІ. Выпуск 121. Москва, Трансжелдориздат, 1960.

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОЙ ПОДВЕСКИ НА ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕПЛОВОЗА ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОЙ ПОДВЕСКИ

(РЕЗЮМЕ)

В работе устанавливаются дифференциальные уравнения непоглощаемых свободных поперечных колебаний.

Имея в виду значение собственных пульсаций для подвесных конструкций на упругих элементах, определяется изменение этих пульсаций в зависимости от трех параметров :

L — длина математического маятника синкронного физическому (поперечный относ люльки) ;

η — параметр учитывающий распределение подвесной массы к обеим ступеням подвески ;

p — параметр учитывающий отношение статических стрел обеих ступней подвески.

DER EINFLUSS EINIGER PARAMETER DER ELASTISCHEN LAGERUNG AUF DIE HORIZONTALEN SCHWINGUNGEN DER DIESELELEKTRISCHEN-LOKOMOTIVE 0—6—0 D.A.

(ZUSAMMENFASSUNG)

Im Beitrag werden die Bewegungsdifferentialgleichungen der freien ungedämpften horizontalen Schwingungen bestimmt.

Im Anbetracht der Wichtigkeit welche die Eigen-Kreisfrequenzen für eine elastisch gelagerte Konstruktion haben, werden die Veränderungen dieser Kreisfrequenzen in Abhängigkeit von drei Parametern untersucht.

L—die reduzierte Pendellänge des als physischer Pendel betrachteten Lokomotivkasten.

η—ein Parameter welcher die Verteilung der elastisch gelagerten Masse auf die zwei Stufen der Lagerung berücksichtigt.

p—ein Parameter welcher das Verhältniss der statischen Verformung der zwei Stufen der Lagerung berücksichtigt.

BUD. PESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR